

9 РОЗРАХУНКИ ПРИ ДИНАМІЧНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ

Під динамічними розуміють навантаження, які змінюються з часом так, що надають елементам конструкції прискорення і приводять до появи сил інерції. Динамічні навантаження викликають у конструкції напруження, деформації та переміщення, що змінюються з часом. Залежно від закону зміни, розрізняють такі види навантажень:

а) періодичні, які змінюються з часом за періодичним законом (рисунок 9.1а). Ці навантаження виникають в механізмах, що мають неврівноважені обертові маси;

б) імпульсні, які характеризуються швидким наростанням і значною тривалістю (рисунок 9.1б). Спостерігаються при вибухах;

в) ударні, що виникають при контактній взаємодії тіл (рисунок 9.1в);

г) рухомі, які змінюють положення на конструкції. Виникають у мостових, кранових та інших конструкціях;

д) випадкові, при яких закон зміни з часом випадковий. Такі навантаження виникають при землетрусах (короткочасні), при дії звукового тиску реактивних двигунів (довготривалі) (рисунок 9.1г);

е) інерційні, які виникають в механізмах і конструкціях, що рухаються зі сталим прискоренням. У цьому разі постійні інерційні сили не відрізняються за характером дії від статичних.

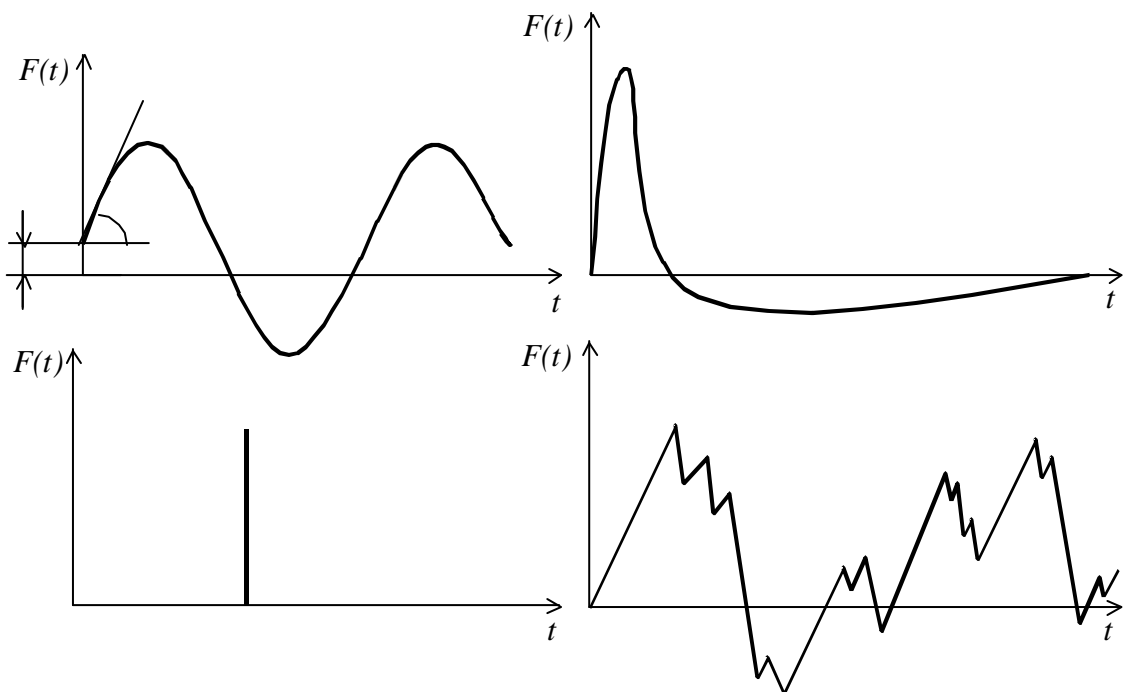


Рисунок 9.1 – Види навантажень: а) періодичні; б) імпульсні;
в) ударні; г) випадкові.

Розрахунок на динамічні навантаження, як і на статичні, полягає у визначенні напружень і переміщень конструкції (аналог перевірного розрахунку) або в доборі параметрів, що забезпечують її нормальну експлуатацію (проектний розрахунок). Суттєве ускладнення вносить залежність навантаження від часу, при цьому виявляється взаємодія параметрів навантаження й конструкції, яка приводить до якісно нових ефектів, зокрема резонансу.

Велике значення при побудові моделі системи має кількість динамічних ступенів вільності – узагальнених координат, що визначають положення системи у просторі і часі.

Щоб дістати рівняння руху системи при динамічних навантаженнях, використовують кілька підходів. Один із них – квазістатичний, оснований на рівняннях статики і принципі д'Аламбера. Рівняння руху в цьому випадку набувають вигляду другого закону Ньютона

$$\frac{d}{dt} \left(m \frac{dv}{dt} \right) = p(t), \quad (9.1)$$

де m – маса; t – час; $\frac{dv}{dt}$ – швидкість; $p(t)$ – навантаження.

Для складних систем зручніше користуватись енергетичними залежностями, зокрема диференціальними рівняннями Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i, \quad (i = 1, \dots, n), \quad (9.2)$$

де T – кінетична енергія; U – потенціальна енергія; q_i, \dot{q}_i, Q_i – відповідно узагальнені координати, швидкості та сили; n – кількість ступенів вільності системи (кількість узагальнених координат).

Щоб дістати рівняння руху за допомогою рівнянь Лагранжа, необхідно вибрати узагальнені координати і відповідні їм сили, а далі записати кінетичну й потенціальну енергію системи у вигляді квадратичних форм

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}, \quad U = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q}, \quad (9.3)$$

де \mathbf{M}, \mathbf{K} – відповідно матриці мас і жорсткості системи.

Альтернативним попередньому є метод, який використовує інтегральний принцип Гамільтона-Остроградського [9]

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - U) dt - \int_{t_1}^{t_2} \delta W = 0, \quad (9.4)$$

де $\delta T, \delta U, \delta W$ – варіації відповідно кінетичної, потенціальної енергії, а також роботи зовнішніх сил і сил опору. Суттєва перевага рівняння (9.4) порівняно з іншими – більша можливість вибору наближених розв'язків і можливість уникнути пошуку рівнянь руху системи в диференціальній формі.

9.1 Системи з одним ступенем вільності

Розглянемо пружну систему у вигляді невагомої балки з масою m , навантажену силою $P(t)$ (рисунок 9.2). Переміщення маси можна подати у вигляді

$$w = P(t)\delta_{1p} - (m\dot{w} + P^*)\delta_{11}, \quad (9.5)$$

де δ_{1p}, δ_{11} – коефіцієнти впливу (податливості); P^* – сила опору; $m\dot{w}$ – сила інерції, $\ddot{w} \equiv \frac{d^2w}{dx^2}$.

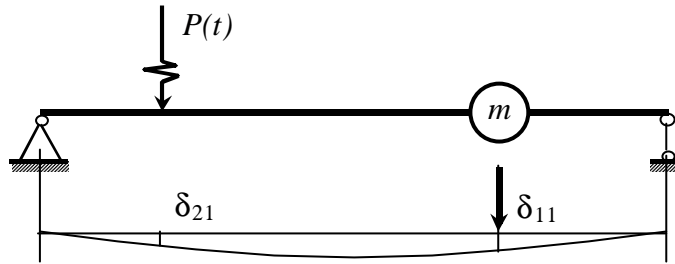


Рисунок 9.2 – Система з одним ступенем вільності

Нехай $\omega = \sqrt{\frac{1}{\delta_{11}m}}$ – частота коливань системи, $k = \frac{1}{\delta_{11}}$ – її жорсткість,

$\frac{q(t)\delta_{1p}}{m\delta_{11}}$ – узагальнене навантаження. Тоді з (9.5) дістанемо рівняння руху

$$\ddot{w} + \frac{1}{m}P^* + \omega^2w = q(t). \quad (9.6)$$

Складність рівняння (9.6) залежить від вибору сили P^* . У найпростішому випадку силу опору вважають пропорційною швидкості ($P^* = c\dot{w}$). Тоді рівняння набирає вигляду

$$\ddot{w} + 2n\dot{w} + \omega^2w = q(t), \quad (2n = c/m). \quad (9.7)$$

Розглянемо кілька випадків розв'язування рівняння (9.7), насамперед з метою введення термінології.

9.1.1 Вільні коливання без сил опору

У цьому разі $q(t) = 0$, тому рівняння (9.7) запишеться у вигляді

$$\ddot{w} + \omega^2w = 0. \quad (9.8)$$

Розв'язок рівняння:

$$w = A\sin(\omega t - \varphi), \quad (9.9)$$

де A і φ – сталі інтегрування.

Враховуючи початкові умови $w(0) = w_0$, $\dot{w}(0) = \dot{w}_0$, запишемо

$$A = \sqrt{w_0^2 + \frac{\dot{w}_0^2}{\omega^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\dot{w}_0}{\omega w_0}. \quad (9.10)$$

Згідно з (9.9), (9.10), система з одним ступенем вільності виконує гармонічні коливання, характер яких залежить від параметрів системи і початкових умов (рисунок 9.2).

9.1.2 Вільні затухаючі коливання

Розв'язок системи (9.7) при $q(t) = 0$

$$w = Ae^{-nt} \sin(\omega_1 t + \varphi), \quad (9.11)$$

де $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - h^2}$.

Згідно з рисунком 9.3, маємо затухаючі коливання. Швидкість затухання залежить від коефіцієнта $n = \frac{c}{2m}$. Для аналізу коливань часто користуються безрозмірним параметром $\Delta = \ln\left(\frac{a_{i+1}}{a_i}\right)$, так званим декрементом коливань. У розглядуваному випадку $\Delta = \frac{2\pi n}{\omega}$.

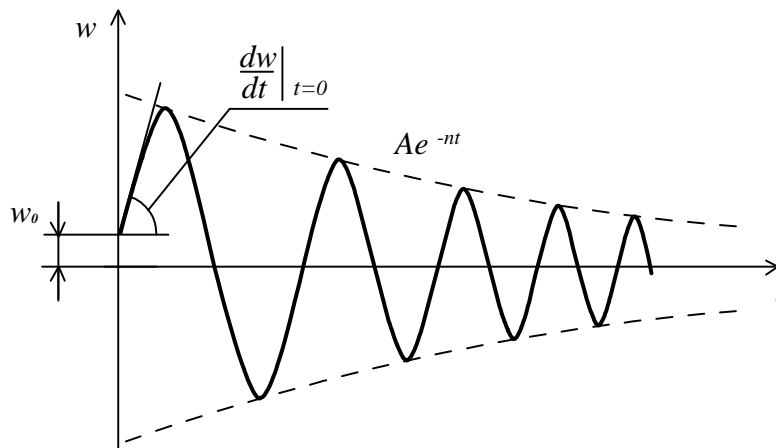


Рисунок 9.3 – Затухаючі коливання

9.1.3 Вимушені коливання при $q(t) = q_0 \sin vt$

Розв'язок рівняння (9.6) у цьому випадку

$$w = Ae^{-nt} \sin(\omega_1 t + \varphi) + A_1 \sin(vt - \psi), \quad (9.12)$$

де

$$A_1 = \frac{q_0 \delta_{1p} / \delta_{11} m}{\omega^2 \sqrt{(1 - \nu^2 / \omega^2) + 4n^2 \nu^2 / \omega^2}}. \quad (9.13)$$

Позначивши $q_0 \delta_{1p} = w_c$ і ввівши коефіцієнт динамічності

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{(1 - \nu^2 / \omega^2) + 4n^2 \nu^2 / \omega^2}}, \quad (9.14)$$

дістанемо

$$w = \beta w_c. \quad (9.15)$$

якщо статичне переміщення w_c додається до динамічного w , маємо

$$w_{\max} = (1 + \beta) w_c. \quad (9.16)$$

Знайдемо, наприклад, переміщення двигуна під дією сил інерції, що виникають через нерівноваженість його ротора (рисунок 9.4).

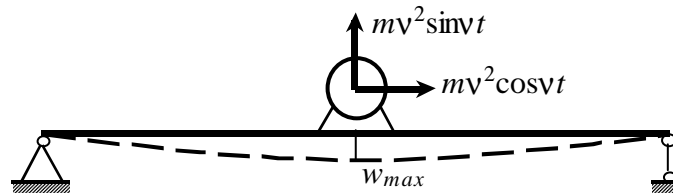


Рисунок 9.4 – Переміщення двигуна під дією сил інерції

Навантаження визначається у вигляді $q = m\nu^2 e \sin \nu t$, причому $q_0 = m\nu^2 e$

Підставивши значення амплітуди навантаження в (9.13), запишемо

$$w = w_c \left(1 + \frac{m_p \nu^2 e}{mg} \beta \right), \quad (9.17)$$

де e – ексцентриситет маси ротора; g – прискорення вільного падіння; m_p , m – маса ротора і двигуна в цілому; w_c – переміщення (прогин) балки в перерізі, де розміщено двигун.

Графік залежності динамічного переміщення від співвідношення частоти зовнішньої сили ν і власної частоти коливань ω балки з масою показано на рисунку 9.5.

Як видно, амплітуда коливань істотно залежить від співвідношення ν/ω , а також від коефіцієнта затухання n (або декремента коливань). Явище збільшення амплітуди коливань при $\nu/\omega = 1$, а також в області біля цього відношення називається резонансом.

де \mathbf{M} – матриця мас; \mathbf{D} – матриця податливостей; \mathbf{P}^* – матриця демпфірування; \mathbf{Q} – матриця зовнішніх навантажень; $\mathbf{w}, \ddot{\mathbf{w}}$ – вектори переміщень та їх прискорень;

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{11} & \dots & \delta_{11} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}^* = \begin{Bmatrix} p_1^* \\ p_2^* \\ \vdots \\ p_n^* \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{w} = \{w_1 \ w_2 \ \dots \ w_n\}^T, \quad \ddot{\mathbf{w}} = \{\ddot{w}_1 \ \ddot{w}_2 \ \dots \ \ddot{w}_n\}^T. \quad (9.19)$$

Помноживши рівняння на матрицю $\mathbf{K} = \mathbf{D}^{-1}$ (\mathbf{K} – матриця жорсткості), отримаємо

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{w}} + \mathbf{K} \mathbf{w} + \mathbf{P}^* = \mathbf{Q}. \quad (9.20)$$

9.2.1 Вільні коливання

Основним питанням аналізу вільних коливань є проблема власних частот системи. Розглянемо постановку задачі у цьому випадку.

Рівняння вільних коливань без демпфірування одержимо з (9.20) при $\mathbf{Q} = \mathbf{0}$ і $\mathbf{P}^* = \mathbf{0}$.

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{w}} + \mathbf{K} \mathbf{w} = \mathbf{0}. \quad (9.21)$$

Розв'язок рівняння (9.21), який відповідає гармонічним коливанням з частотою ω і початковою фазою ψ

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_0 \sin(\omega t + \psi), \quad (9.22)$$

де \mathbf{w}_0 – вектор ординат – переміщень мас системи, відповідний частоті ω .

Згідно з (9.21), вектор \mathbf{w}_0 і частота ω мають задовольняти рівнянню

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{w}_0 = \mathbf{0}, \quad (9.23)$$

яке еквівалентне системі n лінійних алгебраїчних рівнянь щодо компонентів вектора \mathbf{w}_0 . Умова існування ненульових розв'язків приводить до характеристичного рівняння

$$\det[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}] = 0. \quad (9.24)$$

Корені рівняння (9.24) $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ називаються власними частотами (спектром частот) системи. Можна показати, що для існування n дійсних коренів достатньо, щоб матриці \mathbf{m} і \mathbf{K} були симетричні, а \mathbf{M} – додатньо визначеною [36].

Визначивши корені рівняння (9.24), знайдемо відповідні вектори \mathbf{w} . Остаточний розв'язок задачі дає n власних значень і n відповідних векторів. Останні можна подати у вигляді матриці, кожний стовпець якої є власним вектором:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \dots & w_{1n} \\ w_{21} & w_{22} & \dots & w_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{n1} & w_{n2} & \dots & w_{nn} \end{bmatrix}. \quad (9.25)$$

Матрицю \mathbf{W} називають модальною матрицею задачі власних значень рівняння (9.23). Такі значення можна подати у вигляді діагональної матриці $\mathbf{\Omega}^2$, яку називають спектральною матрицею задачі власних значень рівняння (9.23)

$$\mathbf{\Omega}^2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & \\ & \omega_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega_n^2 \end{bmatrix}. \quad (9.26)$$

Можна показати, що власні вектори, які відповідають різним власним значенням, задовольняють умови ортогональності при $\omega_i^2 \neq \omega_j^2$

$$\mathbf{w}_i^T \mathbf{K} \mathbf{w}_i = 0, \quad \dot{\mathbf{w}}_i^T \mathbf{K} \dot{\mathbf{w}}_i = 0. \quad (9.27)$$

Ортогональність власних векторів відносно \mathbf{K} і \mathbf{M} означає, що матриці $\mathbf{W}_i^T \mathbf{K} \mathbf{W}_i$ і $\dot{\mathbf{W}}_i^T \mathbf{K} \dot{\mathbf{W}}_i$ є діагональними.

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_i^T \mathbf{K} \mathbf{W}_i &= \text{diag}(\mathbf{w}_i^T \mathbf{K} \mathbf{w}_i), \\ \dot{\mathbf{W}}_i^T \mathbf{K} \dot{\mathbf{W}}_i &= \text{diag}(\dot{\mathbf{w}}_i^T \mathbf{K} \dot{\mathbf{w}}_i). \end{aligned} \quad (9.28)$$

Кожне власне значення можна знайти як частку

$$\omega_i^2 = \mathbf{w}_i^T \mathbf{K} \mathbf{w}_i / \dot{\mathbf{w}}_i^T \mathbf{K} \dot{\mathbf{w}}_i. \quad (9.29)$$

Умовами ортогональності (9.27) можна скористатися для спрощення рівнянь (9.21). Увівши в (9.21) заміну

$$\mathbf{w} = \mathbf{W} \mathbf{q}, \quad (9.30)$$

де \mathbf{q} – новий вектор переміщень, \mathbf{W} – модальна матриця, дістанемо

$$\mathbf{M} \mathbf{W} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{W} \mathbf{q} = 0.$$

Помножимо рівняння зліва на матрицю \mathbf{W}^T

$$\mathbf{W}^T \mathbf{M} \mathbf{W} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{W}^T \mathbf{K} \mathbf{W} \mathbf{q} = 0.$$

Врахувавши (9.28), запишемо

$$\mathbf{M}_d \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_d \mathbf{q} = 0. \quad (9.31)$$

У рівнянні (9.31) матриці \mathbf{M}_d і \mathbf{K}_d є діагональними

$$\mathbf{M}_d = \dot{\mathbf{W}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{W}}, \quad \mathbf{K}_d = \mathbf{W}^T \mathbf{K} \mathbf{W},$$

тобто окремі рівняння в (9.31) для кожної компоненти вектора не пов'язані між собою. Розв'язок для таких рівнянь значно простіший.

Заміна (9.30) звичайно називається розкладанням за власними формами коливань. Вона широко використовується при аналізі вимушених коливань.

Розв'язок рівнянь (9.21) для вільних коливань при заданих початкових умовах

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}(0), \quad \dot{\mathbf{w}} = \dot{\mathbf{w}}(0) \quad (9.32)$$

де $\mathbf{w}(0), \dot{\mathbf{w}}(0)$ – стовпці заданих початкових переміщень і швидкостей, подається у вигляді розкладення за власними формами коливань

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^n \mathbf{w}_i (a_i \cos \omega_i t + b_i \sin \omega_i t) \quad (9.33)$$

(\mathbf{w}_i – власні вектори, ω_i – власні частоти, a_i, b_i – сталі інтегрування).

Підставляючи розв'язок у граничні умови, дістаємо систему $2n$ рівнянь для визначення невідомих

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{w}_i a_i = \mathbf{w}(0), \quad \sum_{i=1}^n \mathbf{w}_i \omega_i b_i = \dot{\mathbf{w}}(0). \quad (9.34)$$

Помноживши ліву і праву частини цих рівнянь на добуток $\mathbf{w}_j^T \mathbf{M}$ і врахувавши умови ортогональності (9.27), запишемо

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_i^T \mathbf{M} \mathbf{w}_i a_i &= \mathbf{w}_i^T \mathbf{M} \mathbf{w}(0), \\ \mathbf{w}_i^T \mathbf{M} \mathbf{w}_i \omega_i b_i &= \mathbf{w}_i^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{w}}(0), \end{aligned} \quad (9.35)$$

звідки

$$a_i = \frac{\mathbf{w}_i^T \mathbf{M} \mathbf{w}(0)}{\mathbf{w}_i^T \mathbf{M} \mathbf{w}_i}, \quad b_i = \frac{\mathbf{w}_i^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{w}}(0)}{\mathbf{w}_i^T \mathbf{M} \mathbf{w}_i \omega_i}. \quad (9.36)$$

Таким чином, розв'язок рівняння (9.21) при вільних коливаннях із заданими початковими переміщеннями і швидкостями за всіма координатами (9.32) матиме вигляд [41]

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{w}_i \mathbf{w}_i^T \mathbf{M}}{\mathbf{w}_i^T \mathbf{M} \mathbf{w}_i} \left(\mathbf{w}(0) \cos \omega_i t + \frac{\dot{\mathbf{w}}(0)}{\omega_i} \sin \omega_i t \right). \quad (9.37)$$

9.2.2 Вимушені коливання без демпфірування

Рівняння вимушених коливань системи з n ступенями вільності

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{w}} + \mathbf{K} \mathbf{w} = \mathbf{R} \cos \omega t. \quad (9.38)$$

Розв'язок рівняння можна знайти у вигляді $\mathbf{w} = \mathbf{w}_0 \cos \omega t$. Після підстановки в рівняння і скорочення множника $\cos \omega t$ запишемо систему алгебраїчних рівнянь

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{w}_0 = \mathbf{R}. \quad (9.39)$$

Якщо $\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \neq 0$, то розв'язок рівняння подається у вигляді

$$\mathbf{w}_0 = (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})^{-1} \mathbf{R}. \quad (9.40)$$

Якщо частота зовнішнього навантаження ω збігається з однією з власних частот, то визначник системи дорівнює нулю. Тоді виникає резонанс

на відповідній власній частоті. Таким чином, у загальному випадку система з n ступенями вільності має n резонансів [42].

Коли зовнішнє навантаження є довільною функцією часу $f(t)$, можна скористатися методом розкладення за власними формами вільних коливань системи аналогічно (9.30).

$$\mathbf{w} = \mathbf{W} \mathbf{q} . \quad (9.41)$$

Підставивши (9.41) у рівняння (9.20) при $\mathbf{P}^* = \mathbf{0}$, дістанемо

$$\mathbf{M} \mathbf{W} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{W} \mathbf{q} = \mathbf{f}(t) . \quad (9.42)$$

Помножимо (9.42) зліва на \mathbf{W}^T

$$\mathbf{W}^T \mathbf{M} \mathbf{W} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{W}^T \mathbf{K} \mathbf{W} \mathbf{q} = \mathbf{W}^T \mathbf{f}(t) .$$

Це рівняння можна записати у такій формі

$$\mathbf{M}_d \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_d \mathbf{q} = \mathbf{F} . \quad (9.43)$$

Матриці \mathbf{M}_d і \mathbf{K}_d є діагональними

$$\mathbf{M}_d = \text{diag}[\mathbf{w}_i^T \mathbf{M} \mathbf{w}_i] ,$$

$$\mathbf{K}_d = \text{diag}[\mathbf{w}_i^T \mathbf{K} \mathbf{w}_i] ,$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{W}^T \mathbf{f} .$$

Оскільки рівняння (9.43) не пов'язані між собою, розв'язок кожного з них можна знайти незалежно від інших в такому самому вигляді, як і для системи з одним ступенем вільності.

Докладніше питання вимушених коливань розглядається в [10].

9.3 Метод скінченних елементів у теорії коливань

Щоб дістати основні залежності методу, скористаємось варіаційним рівнянням Гамільтона-Остроградського (розділ 1)

$$\int_0^t (\delta U + \delta T + \delta W) dt = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} \Big|_0^t , \quad (9.44)$$

де $\delta U, \delta T, \delta W$ – варіації відповідно потенціальної енергії системи, її кінетичної енергії та роботи зовнішніх сил; $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}$ – вектор узагальнених переміщень і швидкостей; t – час.

Розглянемо скінченний елемент стержня при плоскому згині (рисунок 9.7а). Переміщення точок стержня

$$w = \mathbf{N} \mathbf{q} ,$$

де \mathbf{N} – матриця інтерполяційних функцій, \mathbf{q} – вузлові переміщення (узагальнені координати).

Матриця інтерполяційних функцій

$$\mathbf{N} = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4] ,$$

де

$$\begin{aligned}
 N_1 &= 1 - 3\frac{x^2}{a^2} + 2\frac{x^3}{a^3}, & N_2 &= x - 2\frac{x^2}{a} + 2\frac{x^3}{a^3}, \\
 N_3 &= 3\frac{x^2}{a^2} - 2\frac{x^3}{a^3}, & N_4 &= -\frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{a^3}.
 \end{aligned}
 \tag{9.46}$$

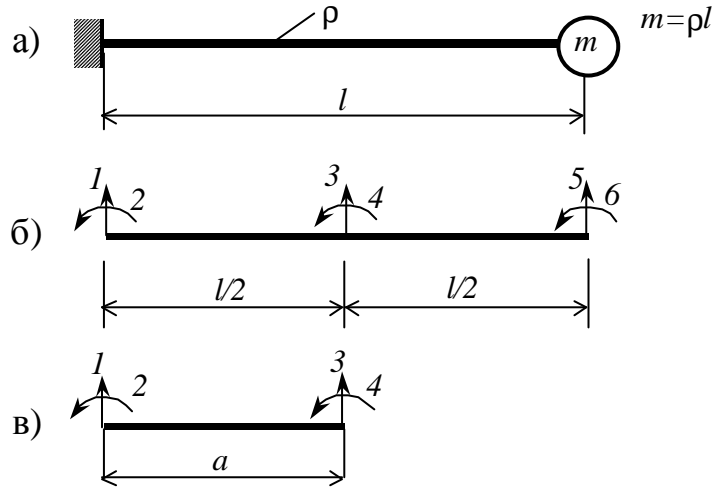


Рисунок 9.7 – Стержень при плоскому згині: а) розрахункова схема; б) дискретна модель; в) скінченний елемент

Вузлові переміщення в цьому разі будуть прогинами і кутами повороту на кінцях стержня (рисунок 9.7б).

Деформації та напруження в перерізах стержня

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{A} \mathbf{w} = \mathbf{A} \mathbf{N} \mathbf{q} = \mathbf{B} \mathbf{q}, \\
 \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C} \mathbf{B} \mathbf{q},
 \end{aligned}
 \tag{9.47}$$

де

$$\mathbf{A} = -z \frac{d^2}{dx^2}, \quad \mathbf{C} = E, \quad \mathbf{B} = -z \frac{d^2}{dx^2} \mathbf{N}$$

(E – модуль пружності матеріалу).

З урахуванням (9.47), (9.45) варіації потенціальної та кінетичної енергії приймуть вигляд

$$\begin{aligned}
 \delta U &= - \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int_V \delta (\mathbf{B} \mathbf{q})^T \mathbf{C} \mathbf{B} \mathbf{q} dV = \\
 &= - \delta \mathbf{q}^T \left(\int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV \right) \mathbf{q} = - \delta \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q},
 \end{aligned}
 \tag{9.48}$$

$$\begin{aligned}
 \delta T &= \int_V \delta \dot{\mathbf{w}}^T \rho \dot{\mathbf{w}} dV = \int_V (\mathbf{N} \dot{\mathbf{q}})^T \rho \mathbf{N} \dot{\mathbf{q}} dV = \\
 &= \delta \dot{\mathbf{q}}^T \left(\int_V \mathbf{N}^T \mathbf{C} \mathbf{N} dV \right) \dot{\mathbf{q}} = \delta \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}.
 \end{aligned}
 \tag{9.49}$$

У (9.48), (9.49) матриці \mathbf{K} і \mathbf{M} називаються відповідно матрицями жорсткості і мас (ρ – густина матеріалу).

Підставивши варіації енергії δU і δT у (9.44), запишемо

$$\int_0^t (-\delta \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} + \delta \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} + \delta W) dt = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} \Big|_0^t, \quad (9.50)$$

а далі проінтегруємо частинами другий інтеграл в (9.50)

$$\int_0^t \delta \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} dt = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} \Big|_0^t - \int_0^t \delta \mathbf{q}^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} dt.$$

З урахуванням цього інтеграла, дістанемо варіаційне рівняння

$$\delta \mathbf{q}^T \int_0^t \left(\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} + \frac{\delta w}{\delta \mathbf{q}^T} \right) dt = 0. \quad (9.51)$$

Звідси, враховуючи незалежність варіацій $\delta \mathbf{q}^T$, запишемо рівняння руху елемента

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} + \frac{\delta w}{\delta \mathbf{q}^T} = 0. \quad (9.52)$$

Можна також скористатися наближеними методами розв'язування безпосередньо варіаційного рівняння (9.58).

Для системи, складеної з багатьох скінченних елементів, рівняння записується аналогічно рівнянням (9.51), (9.52), лише матриці жорсткості, мас і зовнішніх навантажень складаються для системи в цілому з урахуванням топології системи.

Матриці жорсткості і мас для елемента, зображеного на рисунку 9.7в, мають вигляд

$$\mathbf{K1} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ & \frac{4EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ & & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ \text{сим.} & & & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}, \quad (9.53)$$

$$\mathbf{M1} = \begin{bmatrix} \frac{13}{35}l & \frac{11}{210}l^2 & \frac{9}{70}l & -\frac{13}{420}l^2 \\ & \frac{1}{105}l^3 & \frac{13}{420}l^2 & -\frac{1}{140}l^3 \\ & & \frac{13}{35}l & -\frac{11}{210}l^2 \\ \text{сим.} & & & \frac{1}{105}l^3 \end{bmatrix}. \quad (9.54)$$

Рівняння (9.51), (9.52) і вирази для матриць жорсткості та мас є універсальними, прийнятними для довільних скінченних елементів. Отже, за допомогою методу скінченних елементів система з розподіленими параметрами зводиться до системи з визначеним числом ступенів вільності. Розв'язок рівнянь руху, записаних у результаті використання методу скінченних елементів, нічим не відрізняється від розв'язку рівнянь системи з визначеним (скінченим) числом ступенів вільності.

Розглянемо матриці жорсткості і мас для складніших елементів. Для елемента, що працює на згин з розтягом-стиском (рисунок 3.9), маємо

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K2} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M2} = m \begin{bmatrix} \frac{l}{3} & \frac{l}{6} \\ \frac{l}{6} & \frac{l}{3} \end{bmatrix}.$$

Для елемента, що працює на згин із крученням,

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M3} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K3} = \begin{bmatrix} \frac{GI_k}{l} & -\frac{GI_k}{l} \\ -\frac{GI_k}{l} & \frac{GI_k}{l} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M3} = I_m \begin{bmatrix} \frac{l}{3} & \frac{l}{6} \\ \frac{l}{6} & \frac{l}{3} \end{bmatrix}$$

(G – модуль зсуву, A – площа поперечного перерізу стержня, I_k – момент інерції площі поперечного перерізу при крученні, I – осьовий момент інерції, I_m – момент інерції маси елемента відносно подовжньої осі).

Розглянемо приклади використання методу скінченних елементів для аналізу вільних коливань стержнів і стержневих систем.

Приклад 9.1 Визначити власні форми і частоти коливань стержня з ідеально-пружного матеріалу (рисунок 9.8).

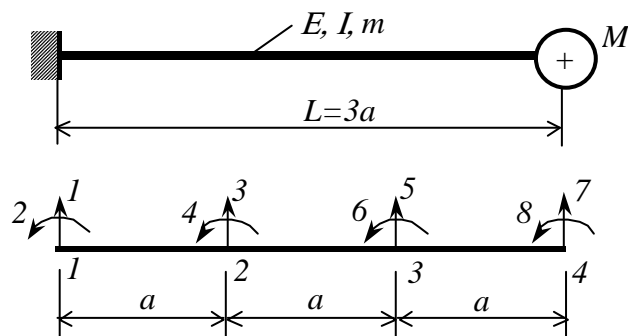


Рисунок 9.8 – Стержень з ідеально-пружного матеріалу і його дискретна модель

Розв'язання:

$E1 := 2 \cdot 10^{11}$ Модуль пружності матеріалу

$I1 := 1 \cdot 10^{-5}$ Момент інерції площі поперечного перерізу

$M := 20$ Маса $A := 10^{-2}$ Площа поперечного перерізу

$\rho := 7.8 \cdot 10^3$ Густина матеріалу

$m := \rho \cdot A$ Маса одиниці довжини стержня

$a := 1$ $i := 1..3$

$E_i :=$ $I_i :=$ $l_i :=$

E1	I1·2	a	Параметри кожного скінченного елемента
E1	I1·1.5	a	
E1	I1	a	

$$K1(i) := \begin{bmatrix} E_i \cdot \frac{I_i}{(l_i)^3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 12 & 6 \cdot l_i & -12 & 6 \cdot l_i \\ 6 \cdot l_i & 4 \cdot (l_i)^2 & -6 \cdot l_i & 2 \cdot (l_i)^2 \\ -12 & -6 \cdot l_i & 12 & -6 \cdot l_i \\ 6 \cdot l_i & 2 \cdot (l_i)^2 & -6 \cdot l_i & 4 \cdot (l_i)^2 \end{bmatrix} \quad \text{Матриця жорсткості елемента}$$

$$K2(i) := \begin{pmatrix} m \cdot \frac{l_i}{210} \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 78 & 11 \cdot l_i & 27 & -6.5 \cdot l_i \\ 11 \cdot l_i & 2 \cdot (l_i)^2 & 6.5 \cdot l_i & -1.5 \cdot (l_i)^2 \\ 27 & 6.5 \cdot l_i & 78 & -11 \cdot l_i \\ -6.5 \cdot l_i & -1.5 \cdot (l_i)^2 & -11 \cdot l_i & 2 \cdot (l_i)^2 \end{bmatrix} \quad \text{Матриця мас}$$

$$mi := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{Матриця індексів}$$

Формування матриць жорсткості і мас стержня

$j := 1..4$ $k := 1..4$ $KK1_{8,8} := 0$ $KK2_{8,8} := 0$

$KK1_{mi_i,j, mi_i,k} := KK1_{mi_i,j, mi_i,k} + K1(i)_{j,k}$ $Km_{8,8} := M$

$KK2 := KK2 + Km$

$KK2_{mi_i,j, mi_i,k} := KK2_{mi_i,j, mi_i,k} + K2(i)_{j,k}$

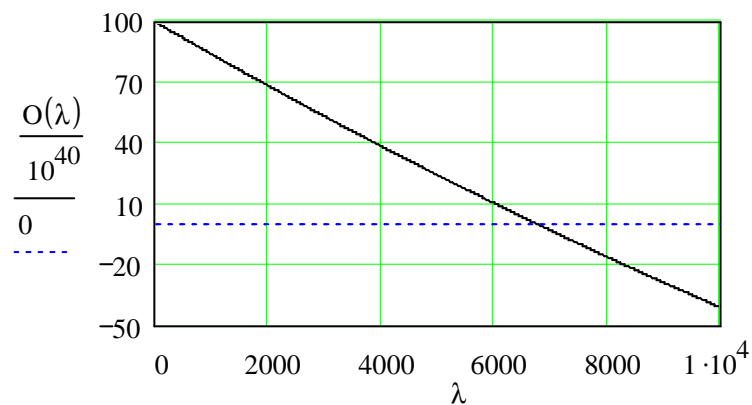
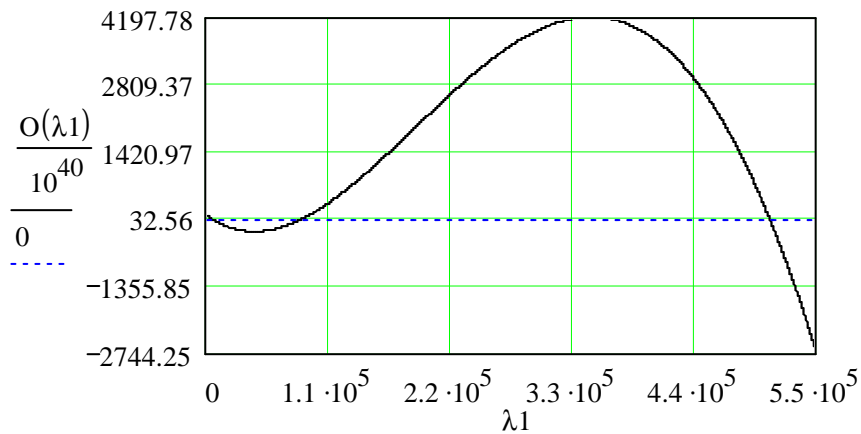
Умови закріплення: $u1=0$, $u2=0$

$KR := \text{submatrix}(KK1, 3, 8, 3, 8)$ $KM := \text{submatrix}(KK2, 3, 8, 3, 8)$

Графічне визначення власних частот

$$O(\lambda) := |KR - \lambda \cdot KM|$$

$$\lambda_1 := 0, 10^2 .. (0.55 \cdot 10^6) \quad \lambda := 0, 10 .. 10^4$$



Використання функцій `eigenvecs` і `eigenvals`

$$vv := \text{eigenvecs}(KM^{-1} \cdot KR)$$

$$vv = \begin{pmatrix} 0.041 & 0.048 & -0.478 & -0.362 & -0.162 & 0.108 \\ 0.687 & -0.656 & 0.403 & -0.315 & -0.227 & 0.198 \\ -0.033 & 0.057 & 0.53 & -0.098 & -0.258 & 0.381 \\ 0.722 & 0.741 & 0.058 & 0.718 & 0.109 & 0.327 \\ -0.055 & -0.116 & -0.525 & 0.283 & 0.244 & 0.742 \\ 8.24 \times 10^{-3} & 0.024 & 0.223 & -0.405 & 0.886 & 0.381 \end{pmatrix}$$

$$ww := \text{eigenvals}(KM^{-1} \cdot KR)$$

$$ww = \begin{pmatrix} 4.445 \times 10^7 \\ 1.22 \times 10^7 \\ 2.69 \times 10^6 \\ 5.083 \times 10^5 \\ 8.395 \times 10^4 \\ 6.735 \times 10^3 \end{pmatrix} \quad w := \sqrt{\vec{ww}} \quad w = \begin{pmatrix} 6.667 \times 10^3 \\ 3.493 \times 10^3 \\ 1.64 \times 10^3 \\ 712.942 \\ 289.749 \\ 82.065 \end{pmatrix}$$

Перші дві форми коливань зображені на рисунку 9.9.

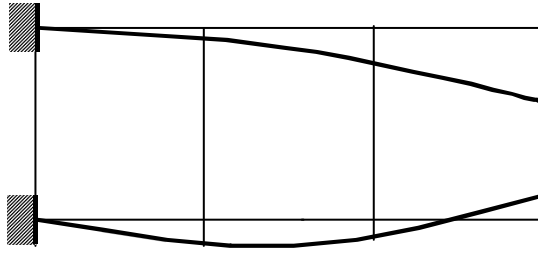


Рисунок 9.9 – Перші дві форми коливань, відповідні частотам

$$\omega_1 = 82.245 \frac{1}{c}, \quad \omega_2 = 289.749 \frac{1}{c}.$$

Приклад 9.2 Визначити форми і частоти стержня з демпфіруванням (рисунок 9.10). Розсіяння енергії враховується введенням комплексного модуля у другому скінченному елементі.

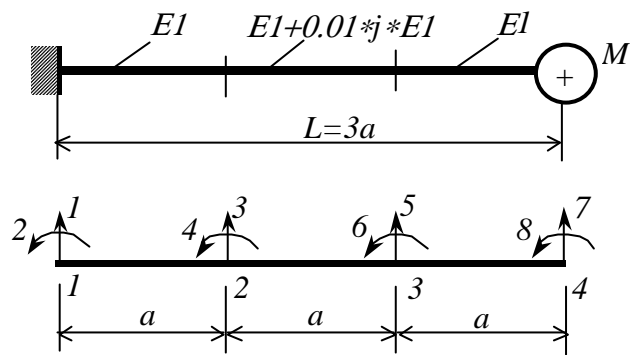


Рисунок 9.10 – Стержень з демпфіруванням і його дискретна модель

Розв'язання:

Вхідні дані:

- $E1 := 2 \cdot 10^{11}$ - модуль пружності
 $I1 := 1 \cdot 10^{-5}$ - момент інерції поперечного перерізу
 $A := 10^{-2}$ - площа поперечного перерізу
 $M := 20$ - маса $a := 1$ - довжина елемента
 $\rho := 7.8 \cdot 10^3$ - густина матеріалу
 $m := \rho \cdot A$ - погонна маса
 $i := 1..3$ $j := \sqrt{-1}$
 $E_i :=$ $I_i :=$ $l_i :=$

E1	I1·2	a	- параметри скінченних елементів
E1 + j·0.01·E1	I1·1.5	a	
E1	I1	a	

$$K1(i) := \begin{bmatrix} E_i \cdot \frac{I_i}{(l_i)^3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 12 & 6 \cdot l_i & -12 & 6 \cdot l_i \\ 6 \cdot l_i & 4 \cdot (l_i)^2 & -6 \cdot l_i & 2 \cdot (l_i)^2 \\ -12 & -6 \cdot l_i & 12 & -6 \cdot l_i \\ 6 \cdot l_i & 2 \cdot (l_i)^2 & -6 \cdot l_i & 4 \cdot (l_i)^2 \end{bmatrix} \quad - \text{ матриця жорсткості}$$

$$K2(i) := \left(m \cdot \frac{l_i}{210} \right) \cdot \begin{bmatrix} 78 & 11 \cdot l_i & 27 & -6.5 \cdot l_i \\ 11 \cdot l_i & 2 \cdot (l_i)^2 & 6.5 \cdot l_i & -1.5 \cdot (l_i)^2 \\ 27 & 6.5 \cdot l_i & 78 & -11 \cdot l_i \\ -6.5 \cdot l_i & -1.5 \cdot (l_i)^2 & -11 \cdot l_i & 2 \cdot (l_i)^2 \end{bmatrix} \quad - \text{ матриця мас}$$

$$mi := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \quad - \text{ матриця індексів}$$

Формування матриць жорсткості і мас стержня

$$j := 1..4 \quad k := 1..4 \quad KK1_{8,8} := 0 \quad KK2_{8,8} := 0$$

$$KK1_{mi_j, j, mi_i, k} := KK1_{mi_j, j, mi_i, k} + K1(i)_{j, k} \quad Km_{8,8} := M$$

$$KK2_{mi_j, j, mi_i, k} := KK2_{mi_j, j, mi_i, k} + K2(i)_{j, k} \quad KK2 := KK2 + Km$$

Врахування граничних умов $u1=0$, $u2=0$

$$KR := \text{submatrix}(KK1, 3, 8, 3, 8) \quad KM := \text{submatrix}(KK2, 3, 8, 3, 8)$$

Власні форми і частоти скінченно-елементної моделі стержня

$$vv := \text{eigenvecs}(KM^{-1} \cdot KR) \quad ww := \text{eigenvals}(KM^{-1} \cdot KR)$$

$$ww = \begin{pmatrix} 4.445 \times 10^7 + 2.967i \times 10^5 \\ 1.22 \times 10^7 + 3.148i \times 10^4 \\ 2.69 \times 10^6 + 7.5i \times 10^3 \\ 5.083 \times 10^5 + 1.79i \times 10^3 \\ 8.396 \times 10^4 + 169.641i \\ 6.735 \times 10^3 + 16.266i \end{pmatrix} \quad w := \sqrt{\frac{\overrightarrow{ww}}{ww}} \quad w = \begin{pmatrix} 6.667 \times 10^3 + 22.248i \\ 3.493 \times 10^3 + 4.506i \\ 1.64 \times 10^3 + 2.287i \\ 712.946 + 1.255i \\ 289.751 + 0.293i \\ 82.066 + 0.099i \end{pmatrix}$$

$$vv^{(4)} = \begin{pmatrix} -0.362 - 6.064i \times 10^{-4} \\ -0.314 + 1.013i \times 10^{-3} \\ -0.098 - 4.621i \times 10^{-4} \\ 0.718 \\ 0.283 + 1.035i \times 10^{-3} \\ -0.405 + 4.071i \times 10^{-4} \end{pmatrix} \quad vv^{(5)} = \begin{pmatrix} -0.162 + 4.847i \times 10^{-4} \\ -0.227 + 9.17i \times 10^{-4} \\ -0.258 + 5.619i \times 10^{-4} \\ 0.109 - 1.504i \times 10^{-3} \\ 0.244 - 1.951i \times 10^{-4} \\ 0.886 \end{pmatrix}$$

$$vv^{(6)} = \begin{pmatrix} 0.108 + 3.095i \times 10^{-4} \\ 0.198 + 5.617i \times 10^{-4} \\ 0.381 + 3.201i \times 10^{-4} \\ 0.327 - 3.952i \times 10^{-4} \\ 0.742 \\ 0.381 - 2.803i \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

$$d := 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{\overrightarrow{\operatorname{Im}(w)}}{\operatorname{Re}(w)} \right) \quad d = \begin{pmatrix} 0.021 \\ 8.104 \times 10^{-3} \\ 8.761 \times 10^{-3} \\ 0.011 \\ 6.348 \times 10^{-3} \\ 7.588 \times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad \text{- декремент коливань стержня на кожній формі}$$

Приклад 9.3 Визначити власні частоти і форми коливань плоскої рами (рисунок 9.11).

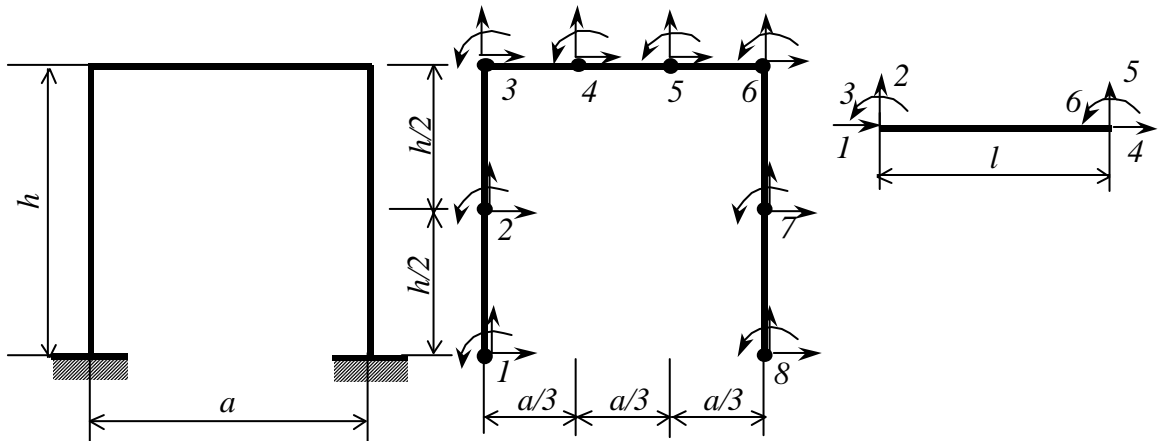


Рисунок 9.11 – Плоска рама, її дискретна модель і скінченний елемент

Розв'язання:

Вхідні дані:

$$a := 3 \quad h := 2$$

Модуль пружності (Па):

$$E := 2 \cdot 10^{11}$$

Площа поперечного перерізу стержнів (м**2):

$$A := 1 \cdot 10^{-2}$$

Момент інерції площі A (м**4):

$$I := 1 \cdot 10^{-4}$$

Розбиваємо раму на сім скінченних елементів

Матриця координат вузлів:

$$Nc := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{a}{3} & 2 \cdot \frac{a}{3} & a & a & a \\ 0 & \frac{h}{2} & h & h & h & h & \frac{h}{2} & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Матриця, яка показує послідовність з'єднання елементів (топологічна матриця):

$$Top := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \\ 5 & 6 \\ 6 & 7 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$ke := \text{rows}(Top) \quad - \text{кількість елементів} \quad ke = 7$$

$$kn := \text{cols}(Top) \quad - \text{кількість вузлів у кожному елементі}$$

$$kn = 2$$

Обчислюємо координати вузлів кожного елемента
у глобальній системі координат

$$i := 1 .. ke \quad jj := 1 .. kn$$

$$X_{n_{jj},i} := Nc_{1,(Top_{i,jj})} \quad Y_{n_{jj},i} := Nc_{2,(Top_{i,jj})}$$

Довжини елементів

$$l_i := \sqrt{(X_{n_2,i} - X_{n_1,i})^2 + (Y_{n_2,i} - Y_{n_1,i})^2}$$

Елементи матриці направляючих косинусів

$$s(i) := \frac{Y_{n_2,i} - Y_{n_1,i}}{l_i} \quad c(i) := \frac{X_{n_2,i} - X_{n_1,i}}{l_i}$$

Матриця направляючих косинусів

$$T(i) := \begin{pmatrix} c(i) & s(i) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s(i) & c(i) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c(i) & s(i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s(i) & c(i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Формування матриці індексів

$$m_{i,(3 \cdot jj - 2)} := 3 \cdot Top_{i,jj} - 2$$

$$m_{i,(3 \cdot jj - 1)} := 3 \cdot Top_{i,jj} - 1$$

$$m_{i,3 \cdot jj} := 3 \cdot Top_{i,jj}$$

Матриця індексів:

$$m_i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 \\ 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 \end{pmatrix}$$

Матриця жорсткості елемента

$$Ke(i) := \frac{E}{l_i} \cdot \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & -A & 0 & 0 \\ 0 & 12 \cdot \frac{I}{(l_i)^2} & 6 \cdot \frac{I}{l_i} & 0 & -12 \cdot \frac{I}{(l_i)^2} & 6 \cdot \frac{I}{l_i} \\ 0 & 6 \cdot \frac{I}{l_i} & 4 \cdot I & 0 & -6 \cdot \frac{I}{l_i} & 2 \cdot I \\ -A & 0 & 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & -12 \cdot \frac{I}{(l_i)^2} & -6 \cdot \frac{I}{l_i} & 0 & 12 \cdot \frac{I}{(l_i)^2} & -6 \cdot \frac{I}{l_i} \\ 0 & 6 \cdot \frac{I}{l_i} & 2 \cdot I & 0 & -6 \cdot \frac{I}{l_i} & 4 \cdot I \end{bmatrix}$$

Матриця мас елемента

$$m := A \cdot 7.85 \cdot 10^3$$

$$Me(i) := \begin{bmatrix} \frac{210}{3} & 0 & 0 & \frac{210}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 78 & 11 \cdot l_i & 0 & 27 & -6.5 \cdot l_i \\ 0 & 11 \cdot l_i & 2 \cdot (l_i)^2 & 0 & 6.5 \cdot l_i & -1.5 \cdot (l_i)^2 \\ \frac{210}{6} & 0 & 0 & \frac{210}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 27 & 6.5 \cdot l_i & 0 & 78 & -11 \cdot l_i \\ 0 & -6.5 \cdot l_i & -1.5 \cdot (l_i)^2 & 0 & -11 \cdot l_i & 2 \cdot (l_i)^2 \end{bmatrix} \cdot \left(m \cdot \frac{l_i}{210} \right)$$

Обчислення компонентів матриць жорсткості і мас елемента у глобальній системі координат

$$Ke\alpha(i) := T(i)^T \cdot Ke(i) \cdot T(i)$$

$$Me\alpha(i) := T(i)^T \cdot Me(i) \cdot T(i)$$

Побудова матриць жорсткості і мас для рами:

$$K_{\max(mi), \max(mi)} := 0 \quad M_{\max(mi), \max(mi)} := 0$$

$$k := 1..6 \quad ik := 1..6 \quad \max(mi) = 24$$

$$K_{mi, ik, mi, k} := K_{mi, ik, mi, k} + Ke\alpha(i)_{ik, k}$$

$$M_{mi, ik, mi, k} := M_{mi, ik, mi, k} + Me\alpha(i)_{ik, k}$$

Будуємо редуційовані матриці жорсткості і мас рами, виключаючи рядки і стовпці з номерами переміщень, що не допускаються накладеними на раму в'язями.

$$m := 1..(\max(mi) - 6) \quad n := 1..(\max(mi) - 6)$$

$$mr := (4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12 \ 13 \ 14 \ 15 \ 16 \ 17 \ 18 \ 19 \ 20 \ 21)$$

$$KR_{m, n} := K_{mr1, m, mr1, n} \quad MR_{m, n} := M_{mr1, m, mr1, n} \quad j := \sqrt{-1}$$

$$ww := \text{eigenvals}(MR^{-1} \cdot KR) \quad vv := \text{eigenvecs}(MR^{-1} \cdot KR)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_V^{(13)} &= \begin{pmatrix} 0.178 \\ 1.903 \times 10^{-3} \\ -0.281 \\ 0.425 \\ 3.797 \times 10^{-3} \\ -0.153 \\ 0.427 \\ -0.033 \\ 0.048 \\ 0.427 \\ 0.033 \\ 0.048 \\ 0.425 \\ -3.797 \times 10^{-3} \\ -0.153 \\ 0.178 \\ -1.903 \times 10^{-3} \\ -0.281 \end{pmatrix} &
\mathbf{v}_V^{(14)} &= \begin{pmatrix} 0.097 \\ 0.015 \\ -0.088 \\ -4.983 \times 10^{-3} \\ 0.03 \\ 0.362 \\ -1.676 \times 10^{-3} \\ 0.483 \\ 0.342 \\ 1.676 \times 10^{-3} \\ 0.483 \\ -0.342 \\ 4.983 \times 10^{-3} \\ 0.03 \\ -0.362 \\ -0.097 \\ 0.015 \\ 0.088 \end{pmatrix} &
\mathbf{v}_V^{(15)} &= \begin{pmatrix} 0.414 \\ -0.146 \\ 4.714 \times 10^{-3} \\ -0.092 \\ -0.25 \\ 0.271 \\ -0.13 \\ -0.244 \\ 0.294 \\ -0.13 \\ 0.244 \\ 0.294 \\ -0.092 \\ 0.25 \\ 0.271 \\ 0.414 \\ 0.146 \\ 4.714 \times 10^{-3} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_V^{(16)} &= \begin{pmatrix} -0.469 \\ 0.027 \\ 0.204 \\ -0.102 \\ 0.049 \\ -0.409 \\ -0.036 \\ 0.097 \\ 0.218 \\ 0.036 \\ 0.097 \\ -0.218 \\ 0.102 \\ 0.049 \\ 0.409 \\ 0.469 \\ 0.027 \\ -0.204 \end{pmatrix} &
\mathbf{v}_V^{(17)} &= \begin{pmatrix} 0.225 \\ 0.038 \\ -0.096 \\ -0.053 \\ 0.07 \\ 0.509 \\ -0.063 \\ 0.251 \\ -0.323 \\ -0.063 \\ -0.251 \\ -0.323 \\ -0.053 \\ -0.07 \\ 0.509 \\ 0.225 \\ -0.038 \\ -0.096 \end{pmatrix} &
\mathbf{v}_V^{(18)} &= \begin{pmatrix} 7.517 \times 10^{-3} \\ 0.212 \\ 2.091 \times 10^{-3} \\ 5.486 \times 10^{-3} \\ 0.332 \\ -0.024 \\ 2.136 \times 10^{-3} \\ -0.051 \\ -0.584 \\ -2.136 \times 10^{-3} \\ -0.051 \\ 0.584 \\ -5.486 \times 10^{-3} \\ 0.332 \\ 0.024 \\ -7.517 \times 10^{-3} \\ 0.212 \\ -2.091 \times 10^{-3} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

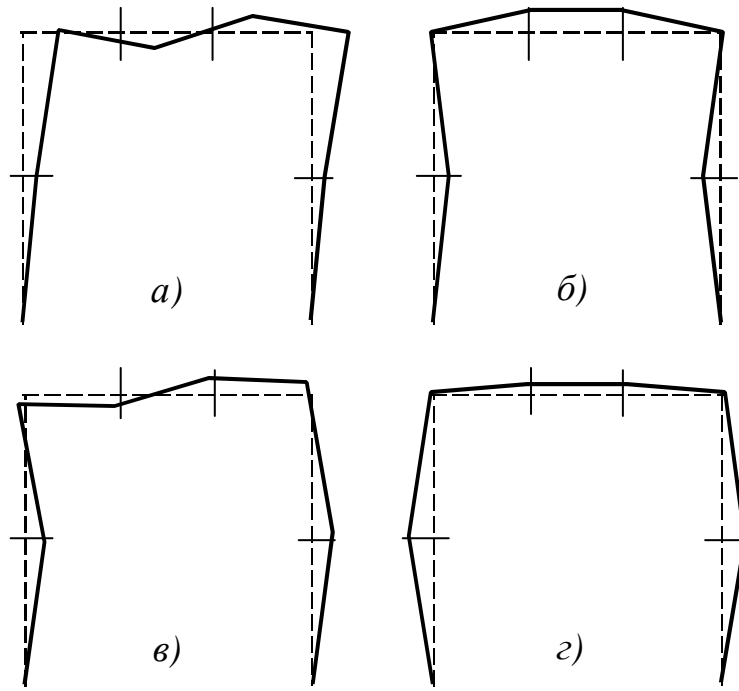


Рисунок 9.12 – Власні форми і частоти коливань: а) 13 – $\omega^2_{13} = 1.124 \cdot 10^5$
; б) 14 – $\omega^2_{14} = 6.949 \cdot 10^5$; в) 15 – $\omega^2_{15} = 7.88 \cdot 10^6$; г) 16 – $\omega^2_{16} = 5.165 \cdot 10^6$