Приклади розрахунків на міцність з урахуванням тріщин

Задача 1

Широка пластина з центральною тріщиною розтягується напруженням $\sigma_\infty = 250 МПа$. В'язкість руйнування матеріалу складає $\boldsymbol{K_{IC} = 150 МПа\sqrt{м}}$. Визначити критичну довжину тріщини при крихкому руйнуванні.

Розв'язання

Коефіцієнт інтенсивності напружень в цьому випадку буде:

$K_I = \sigma_\infty \sqrt{\pi l}$.

Умова руйнування пластини з тріщиною:

$K_I = K_{Ic}$,

$\sigma_\infty \sqrt{\pi l} = K_{Ic}$.

звідки витікає критична довжина тріщини

$$2l_C = \frac{2}{\pi}\left(\frac{K_{Ic}}{\sigma_\infty}\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{150}{250}\right)^2 = 0{,}229 м$$

Задача 2

У масивній деталі є внутрішня кругова тріщина. Деталь тривалий час експлуатується в окрихчуючих умовах, що приводять до зростання K_{Ic} і $\boldsymbol{\sigma_T}$. Визначити зміну критичного радіусу тріщини з часом, вважаючи, що розтягуюче напруження завжди підтримується на рівні $\boldsymbol{\sigma_\infty = 0.5\sigma_T}$. Значення K_{Ic} і $\boldsymbol{\sigma_T}$ у різні роки, приведено в таблиці

Таблиця. Значення K_{Ic} і σ_T по роках

Роки	1940	1970	2000
Границя текучості $\sigma_T, МПа$	300	600	2000
В'язкість руйнування $K_{Ic}, МПа\sqrt{м}$	100	120	150

Розв'язання

Коефіцієнт інтенсивності напружень в даному випадку такий:

$K_I = \frac{2\sigma_\infty}{\pi}\sqrt{\pi l} = 0{,}63\sigma_\infty \sqrt{\pi l}$.

Умова критичного стану

$K_I = K_{Ic}$.

Виходячи з цього приходимо до виразу:

$K_I = 0{,}63\sigma_\infty \sqrt{\pi l} = K_{Ic}$.

З урахуванням умови $\sigma_{\infty} = 0{,}5\sigma_T$ радіус тріщини буде таким:

$$l = \frac{1}{0{,}63^2}\left(\frac{K_{Ic}}{0{,}5\sigma_T}\right)^2 = 3{,}2\left(\frac{K_{Ic}}{\sigma_T}\right)^2.$$

Тоді критичний діаметр тріщини для 3-х років спостереження визначимо за формулою:

$$2l_c = 2\cdot 3{,}2\left(\frac{K_{Ic}}{\sigma_T}\right)^2 = 6{,}4\left(\frac{K_{Ic}}{\sigma_T}\right)^2.$$

Отримані дані вміщено в таблиці

Таблиця. Параметри задачі

Роки	1940	1970	2000
$\sigma_T, МН/м^2$	300	600	2000
$K_{Ic}, МПа\sqrt{м}$	100	120	150
$\sigma_{\infty}, МН/м^2$	150	300	1000
$2l, м$	0,71	0,256	0,036

Задача 3

Визначити допустимий розмір тріщини в обшивці літака з алюмінієвого сплаву в зоні кругового ілюмінатора діаметром 0,2 м. Окружні (кільцеві) і осьові (подовжні) напруження від внутрішнього тиску відповідно дорівнюють 80 і 40 $МПа$. Запас міцності повинен бути не нижчим 1,7.

Міцність зразка шириною 0,12 $м$ з тріщиною 20 $мм$ складає 230 $МПа$ при осьовому розтягуванні.

Розв'язання

Відношення довжини тріщини до ширини зразка $\frac{2l}{b} = \frac{20}{120} = 0{,}16$. Це відношення достатньо мале і ***К***-тарировочний коефіцієнт приймемо рівним одиниці. Тоді в'язкість руйнування буде

$$K_c = \sigma\sqrt{\pi l} = 239\sqrt{\pi 10\cdot 10^{-3}} = 41 МПа\sqrt{м}.$$

Оскільки діаметр ілюмінатора достатньо великий (порівняно з передбачуваною довжиною тріщини), то коефіцієнт інтенсивності напружень можна розраховувати як для розтянутого плоского зразка з краєвою тріщиною, тобто $K = 1{,}12\sigma\sqrt{\pi l}$. Положення небезпечної точки показано на рис.12.1.

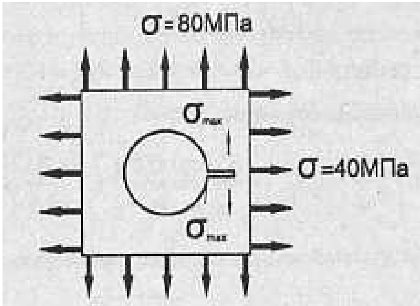


Рис.12.1

Напруження в небезпечній точці складаються з напруження 80 $МПа$ (коефіцієнт концентрації дорівнює 3), а також з напруження 40 $МПа$. Отже, максимальне напруження в небезпечній точці дорівнює:

$$\sigma_{\max} = 3 \cdot 80 - 40 = 200 МПа .$$

Розрахункове рівняння прийме вигляд:

$$1{,}12 n \sigma_{\max} \sqrt{\pi l} = K_C ,$$

де коефіцієнт запасу прийнятий $n = 1{,}7$. Далі знаходимо допустиму довжину тріщини:

$$l = \frac{41^2}{\pi(1{,}12 \cdot 1{,}7 \cdot 200)^2} = 3{,}6 мм .$$

Задача 4

Визначити необхідне зниження навантаження, що допускається на циліндрову розтяжку антени діаметром, розрахованій на статичну міцність із запасом n_T=3 по межі текучості ($\boldsymbol{\sigma_{0.2} = 600 МПа}$). В основі першого витка різьблення знайдено кільцеву тріщину глибиною 1,2мм.

При випробуванні циліндричного зразка діаметром 20 $мм$ з кільцевою тріщиною глибиною 2 $мм$ отримано руйнуючі напруження 320 $МПа$.

Розв'язання

Спочатку знайдемо в'язкість руйнування K_C. Формула для коефіцієнта K циліндра з кільцевою тріщиною про розтягуванні така:

$$K = \frac{P}{\sqrt{D^3}}\left(1{,}72\frac{D}{d} - 1{,}27\right).$$

Діаметр у перерізі з тріщиною $d = D - 2l = 20 - 2{,}2 = 16 мм$.

В'язкість руйнування визначиться так:

$$K_C = \frac{\sigma_C \pi D^2}{4}\frac{1}{\sqrt{D^3}}\left(1{,}72\frac{D}{d} - 1{,}27\right) = \frac{320\pi 0{,}02^2}{4\sqrt{0{,}02^3}}\left(1{,}72\frac{20}{16} - 1{,}27\right) = 31 МПа\sqrt{м} .$$

Тепер з умови $K = K_C$ знайдемо руйнуючу силу антени з тріщиною

$$P_C = \frac{\sigma_T \sqrt{D^3}}{1{,}72\dfrac{D}{d} - 1{,}27} = \frac{31\sqrt{0{,}027^3}}{1{,}72\dfrac{27}{18{,}6} - 1{,}27} = 72 кН .$$

Тут з урахуванням глибини різьблення і тріщини діаметр найменшого перерізу $d = 27 - 2 \cdot 3 - 2 \cdot 1{,}2 = 18{,}6 мм$.

Гранична сила без тріщини, розрахована по границі текучості, дорівнює:

$$P_T = \sigma_T \frac{\pi d^2}{4} = 600 \frac{\pi 21^2}{4} = 210 кН$$

Сила, що допускається $P_{доп} = \frac{P_T}{n_T} = 70 кН$.

Якщо в такому ж співвідношенні зменшити силу натягу антени з тріщиною, то тоді сила повинна бути не більше $\frac{P_C}{n_T} = \frac{72}{3} = 24 кН$.

Задача 5

Пластина розтягується напруженням $100 МПа$. В'язкість руйнування матеріалу $K_{Ic} = 50 МПа\sqrt{м}$. Модуль пружності $\boldsymbol{E = 2 \cdot 10^5}$ МПа. Знайти критичну довжину тріщини і потік енергії у вершину тріщини у момент руйнування.

Розв'язання

З критерію Ірвіна $\boldsymbol{K = K_{IC}}$ знаходимо:

$$\sigma\sqrt{\pi l} = K_{Ic}, \qquad l = l_C = \frac{K_{Ic}^2}{\pi\sigma^2} = \frac{50^2}{3{,}14 \cdot 100^2} = 0{,}08 м = 80 м.$$

Потік енергії в критичний момент

$$\boldsymbol{G = G_{Ic} = \frac{\left(1 - \nu^2\right) K_{Ic}^2}{E} = \frac{\left(1 - 0{,}3^2\right) \cdot 50^2}{2 \cdot 10^5} = 0{,}113 МН / м}.$$

Задача 6

В масивній деталі виявлено кругову тріщину. Деталь розтягується напруженням $\boldsymbol{p}$=345МПа, в'язкість руйнування матеріалу $K_{Ic} = 44 МПа\sqrt{м}$. Визначити діаметр тріщини, що приведе до руйнування.

Розв'язання

Вважаючи, що деталь можна представити у вигляді великого об'ємного простору, запишемо для цього випадку коефіцієнт інтенсивності напружень $K = 2p\sqrt{\frac{R}{\pi}}$. Прирівнюючи його в'язкості руйнування при плоскій деформації, одержуємо критичний радіус тріщини $R_C = \pi\left(\frac{K_{Ic}}{2p}\right)^2 = 0{,}013 м$.

Задача 7

Визначити навантаження, яке можна допустити для пластини з площею поперечного перетину $\boldsymbol{F = 10 см^2}$, що розтягується силою P і що має бічну тріщину завдовжки $\boldsymbol{l}$=2мм . Матеріал пластини – сталь марки 30 з механічними властивостями $\boldsymbol{\sigma_B = 1650 МПа, K_{IC} = 100 МПа\sqrt{м}}$. Прийняти коефіцієнт запасу $n = 1{,}5$.

Розв'язання

Складаємо умову міцності $\boldsymbol{K = K_{IC} / n}$, тобто

$$1{,}12 \frac{P}{F}\sqrt{\pi l} = \frac{K_{Ic}}{n}.$$

Звідси невідома сила P буде визначатися так:

$$P = \frac{K_{Ic} F}{1{,}12 n \sqrt{\pi l}} = \frac{100 \cdot 10^6 \cdot 10 \cdot 10^{-4}}{1{,}12 \cdot 1{,}5 \cdot \sqrt{2\pi \cdot 10^{-3}}} = 752 кН.$$

Тут коефіцієнт 1,12 прийнято як для розтянутої полоси з неглибокою краєвою тріщиною. Якщо розрахунок проводиться без тріщини, то умова міцності $\frac{P}{F} = \frac{\sigma_\beta}{n}$ дає силу $P = \frac{\sigma_в \cdot F}{n} = \frac{1650 \cdot 10^6 \cdot 10 \cdot 10^{-4}}{1{,}5} = 1100 кН$.

Як видно, наявність тріщини знижує допустиму міцність в $\frac{1700}{752} = 1{,}46$ разів.

Задача 8

Визначити допустиму довжину подовжньої крізної тріщини в циліндричній трубі радіусом , товщиною, навантаженою внутрішнім тиском $p = 2 МПа$. В'язкість руйнування .

Розв'язання

Розрахунок ведемо згідно з умовою $K = K_{Ic}$.

Розв'язання цього рівняння в середовищі Mathcad приведено нижче

Визначення допустимої довжини крізної тріщини у циліндричній трубі

Радіус труби $R := 0.5$ В'язкість руйнування $K_C := 50\cdot10^6\ \text{Па}\cdot\sqrt{\text{м}}$

Товщина стінки труби $h := 1\cdot10^{-2}\ \text{м}$

Тиск у трубі $p := 2\times10^6\ \text{Па}$

Умова тріщиностійкості $K := K_C$

Поздовжня тріщина розкривається кільцевим напружені $\sigma := \dfrac{p\cdot R}{h}$

Коефіцієнт інтенсивності напружень для поздовжньої тріщини у трубі (з поправкою на кривизну поверхні оболонки

$$K(L) := \sigma\cdot\sqrt{\pi\cdot L}\cdot\sqrt{1+1.61\frac{L^2}{R\cdot h}}$$

Критичну довжину тріщини знаходимо з умови тріщиностійкості

$L := 0.1$

GIVEN

$K(L) = K_C$

$L := \mathrm{FIND}(L)$ $\quad L = 7.942\times10^{-4}$

Критична довжина крізної тріщини $L = 7.942\times10\text{м}^4$

Задача 9

Визначити коефіцієнт запасу міцності пластини шириною $2b = 10см$, яка має посередині поперечну тріщину завдовжки 2$\boldsymbol{l}$=3см . Пластина розтягується напруженням $\boldsymbol{\sigma} = 100$МПа. Трещиностойкость матеріалу пластини $K_{Ic} = 70МПа\sqrt{м}$.

Розв'язання

Відношення довжини тріщини до ширини пластини $\dfrac{2l}{2b} = 0{,}3$.

Коефіцієнт K обчислюємо за формулою секанса (формула Федерсена):

$$K = \sigma\sqrt{\pi l}\sqrt{\sec\frac{\pi l}{2b}}.$$

Умова міцності $K = \dfrac{K_{Ic}}{n}$ приводить до рівняння:

$$\sigma\sqrt{\frac{\pi l}{\cos\frac{\pi l}{2b}}} = \frac{K_{Ic}}{n}.$$

Звідси знаходимо запас міцності:

$$n = \frac{K_{Ic}}{\sigma\sqrt{\dfrac{\pi l}{\cos\dfrac{\pi l}{2b}}}} = \frac{70}{100\sqrt{\dfrac{\pi \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-3}}{\cos 0{,}471}}} = 9{,}6\,.$$

Задача 10

Тонкостінна циліндрична оболонка має крізну подовжню тріщину завдовжки $\boldsymbol{2l_0 = 10 см}$. Товщина оболонки h=0.5 см, радіус R=0.6 м, матеріал алюмінієвийсплавзпараметрами $\boldsymbol{K_{IC} = 20 МПа\sqrt{м}, \sigma_B = 560 МПа, \sigma_{0.2} = 300 МПа}$.

Визначити внутрішній тиск, який можна допустити в оболонці, прийнявши запас міцності ***n***=1.5

Розв'язання

Кільцеве напруження $\sigma = \dfrac{pR}{h}$, коефіцієнт інтенсивності напружень

$$\boldsymbol{K = \sigma\sqrt{\pi l}Y = \sigma\sqrt{\pi l}\sqrt{1 + 1{,}61\frac{l^2}{Ph}}.}$$

Розрахункове рівняння:

$$\frac{pR}{h}\sqrt{\pi l\left(1 + 1{,}61\frac{l^2}{Ph}\right)} = K_{Ic}\,.$$

Звідси граничний тиск дорівнює:

$$p = \frac{K_{IC}h}{R\sqrt{\pi l\left(1 + 1{,}61\dfrac{l^2}{Rh}\right)}} = \frac{20 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-2}}{0{,}3\sqrt{\pi \cdot 5 \cdot 10^{-2}\left(1 + 1{,}61 \cdot \dfrac{5^2}{30 \cdot 0{,}5}\right)}} = 0{,}44 МПа\,.$$

Розрахуємо ефективну довжину тріщини з урахуванням пластичної поправки:

$$l_{эфф} = l\left(1 + \frac{1}{2}\left(Y\frac{\sigma}{\sigma_T}\right)^2\right) = 5\left(1 + \frac{1}{2}\left(Y\frac{PR}{h\sigma_T}\right)^2\right) = 5\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{0{,}76 \cdot 0{,}44 \cdot 0{,}3}{0{,}5 \cdot 300}\right)^2\right) = 5{,}01 см$$

,

де $Y = \sqrt{\dfrac{1 + 1{,}61 l^2}{Rh}} = 0{,}76$.

Кільцеве напруження у граничному стані:

$$\sigma_\theta = \frac{PR}{h} = \frac{0{,}44 \cdot 30}{0{,}5} = 26{,}4 МПа << \sigma_T = 300 МПа\,.$$

Видно, що розмірами пластичної зони можна нехтувати $l_{эфф} \approx l$.

Таким чином, критичний тиск в трубі дорівнює $p_C = 0{,}44 МПа$.

Допустимий тиск повинен бути в n раз менше граничного:

$$[p] = \frac{p_C}{n} = \frac{0{,}44}{1{,}5} = 0{,}29 МПа.$$

Задача 11

В тонкостінному сталевому циліндрі є поздовжня крізна тріщина завдовжки 300$мм$. Радіус циліндра ***R***=400мм, товщина стінки ***t***=15мм . Визначити критичний тиск в циліндрі, якщо в'язкість руйнування $\boldsymbol{K_{IC} = 85 МПа\sqrt{м}}$.

Розв'язання

Кільцеві напруження, виникаючі в стіні циліндра від тиску p:

$$\boldsymbol{\sigma_\theta = \frac{pR}{t}}.$$

Коефіцієнт інтенсивності напружень з урахуванням поправки Фоліуса на кривизну поверхні циліндра:

$$K_I = M\sigma\sqrt{\pi l} = M\frac{pR}{t}\sqrt{\pi l}.$$

Коефіцієнт врахування кривизни оболонки з тріщиною:

$$M = \sqrt{1 + \frac{1{,}61 l^2}{Rt}} = 2{,}6.$$

Умова руйнування циліндра з краєвою тріщиною:

$$2{,}6\frac{pR}{t}\sqrt{\pi l} \ge K_{Ic}.$$

Звідси руйнуючий тиск дорівнює:

$$p = \frac{K_{Ic} t}{2{,}6 R\sqrt{\pi l}} = 5{,}65 МПа.$$

Задача 12

Широка плита стискається напруженням p_0. В плиті є крізна тріщина завдовжки 2***l***=0.06 мм. На поверхню тріщини, в межах $\boldsymbol{-0.9l < x < 0/9l}$, діє тиск $\boldsymbol{10p_0}$. Визначити руйнуючу величину напруження $\boldsymbol{p_0}$. В'язкість руйнування матеріалу $\boldsymbol{K_{IC} = 60 МПа\sqrt{м}}$.

Розв'язання

Умова руйнування для тріщини відриву:

$$K_I = K_{Ic}.$$

Обчислюємо окремо коефіцієнти інтенсивності напружень від двох видів навантажень: напружень p_0 і тиску 10 p_0:

- коефіцієнт інтенсивності напружень при дії навантажень, прикладених до кінців плити:

$$K_I^{\alpha} = \sigma_0 \sqrt{\pi l} = -p_0 \sqrt{\pi l}\,.$$

- коефіцієнт інтенсивності напружень при дії навантажень, прикладених до берегів тріщини (вісь уздовж лінії тріщини, початок координат в середині тріщини):

$$K_I^b = \frac{1}{\sqrt{\pi l}} \int\limits_{-l}^{l} \sigma_y(x) \sqrt{\frac{l+x}{l-x}} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi l}} \int\limits_{-0,9l}^{0,9l} 10 p_0 \frac{a+x}{\sqrt{l^2 - x^2}} dx =$$

$$= \frac{10 p_0}{\sqrt{\pi l}} \int\limits_{-\arcsin 0,9}^{\arcsin 0,9} \frac{l + l \sin\varphi}{\sqrt{l^2 - l^2 \sin^2 \varphi}} \cdot l \cos\varphi d\varphi = 7,13 p_0 \sqrt{\pi l}\,.$$

Загальний коефіцієнт інтенсивності напружень на підставі принципу суперпозиції:

$$K_I^{tot} = K_I^a + K_I^b = -p_0 \sqrt{\pi l} + 7,13 p_0 \sqrt{\pi l} = 6,13 p_0 \sqrt{\pi l}\,.$$

Тоді маємо умови руйнування:

$$K_I^{tot} = 6,13 p_0 \sqrt{\pi l} = K_{Ic}\,.$$

Звідки критичне навантаження дорівнює:

$$P_{oc} = \frac{K_{Ic}}{6,13\sqrt{\pi l}} = \frac{60}{6,13\sqrt{\pi \cdot 0,03}} = 32 \frac{МН}{м^2}\,.$$

Задача 13

Тонкостінна труба скручується моментом M_K. В стінці труби є крізна тріщина завдовжки $2\boldsymbol{l}$=10 мм під кутом $\mathbf{60}^\circ$ до твірної. Радіус труби R=0.14 м, товщина стінки $\boldsymbol{t}$=8 мм . В'язкість руйнування $\boldsymbol{K_{IC} = 50 МПа\sqrt{м}}$, границя текучості $\boldsymbol{\sigma_T = 1200}$ МПа. Визначити руйнуюче значення момента кручення.

Розв'язання

Спочатку переконаємося в справедливості використання величини K_{Ic}.

$$\left.\begin{matrix} l \\ t \end{matrix}\right\} \geq 2,5\left(\frac{K_{Ic}}{\sigma_T}\right)^2 = 2,5\left(\frac{50}{1200}\right)^2 = 0,00435 м\,.$$

Виявилося, що і довжина тріщини, і товщина стінки більше граничного значення і, отже, розрахунок можна вести по K_{Ic}. Дотичне напруження:

$$\tau_{Z\Theta} = \frac{M_K}{W_p} = \frac{M_K}{2\pi R^2 t}\,.$$

Виділимо малий елемент біля тріщини і спроектуємо зусилля на нормаль до похилої поверхні:

$$\sigma \cdot l + \tau_{Z\Theta} \cos 30^\circ \sin 30^\circ + \tau_{Z\Theta} \sin 30^\circ \cos 30^\circ = 0$$

Нормальне напруження, розкриваюче тріщину (тип I):

$$\sigma = -\frac{\sqrt{3}}{2}\tau_{Z\Theta}.$$

Тепер запишемо проекції сил на лінію тріщини:

$$T \cdot l + \tau_{Z\Theta}\cos 30^\circ \sin 30^\circ + \tau_{Z\Theta}\sin 30^\circ \cos 30^\circ = 0.$$

Дотичне напруження, яке зсовує береги тріщини (тип II)

$$T = -\frac{1}{2}\tau_{Z\Theta}.$$

Коефіцієнт інтенсивності напружень для тріщини відриву:

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi l} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\tau_{Z\Theta}\sqrt{\pi l} = \frac{M_K}{4\pi R^2 t}\sqrt{3\pi l}.$$

Для тріщини поперечного зсуву:

$$K_{II} = \tau\sqrt{\pi l} = -\frac{1}{2}\tau_{Z\Theta}\sqrt{\pi l} = \frac{M_K}{4\pi R^2 t}\sqrt{\pi l}.$$

Складемо вираз для ефективного коефіцієнта інтенсивності напружень:

$$K^2_{эфф} = \left(\frac{M_K}{4\pi R^2 t}\sqrt{3\pi l}\right)^2 + \left(\frac{M_K}{4\pi R^2 t}\sqrt{\pi l}\right)^2 + \left(\frac{M_K}{4\pi R^2 t}\right)^2 \cdot 4\pi l.$$

Запишемо умову руйнування $K_{эфф} = K_{Ic}$.

$$\frac{M_K}{4\pi R^2 t}\sqrt{\pi l} = K_{Ic}.$$

Звідси одержуємо руйнуючий момент:

$$M_K = \frac{2\pi R^2 t K_{Ic}}{\sqrt{\pi l}} = \frac{2\pi \cdot 0{,}14^2 \cdot 0{,}1 \cdot 50}{\sqrt{\pi \cdot 0{,}005}} = 0{,}5 MH \cdot м.$$

Задача 14

В пластині, що знаходиться в умовах одновісного розтягу з напруженням $\boldsymbol{\sigma} = 120$МПа, можлива поява тріщини, орієнтованої під кутом α до поздовжньої осі. Трещиностойкость матеріалу $\boldsymbol{K_{IC} = 30 МПа\sqrt{м}}$. Визначити критичну довжину тріщини.

Розв'язання

Коефіцієнт інтенсивності напружень в цьому випадку буде:

$$K = \sigma \cdot (\cos\beta)^2 \cdot \sqrt{\pi l},$$

де, $\beta = 60^\circ$ - кут між напрямом розтягування і нормаллю до лінії тріщини.

$$\sigma(\cos\beta)^2\sqrt{\pi l} = K_{Ic}.$$

З останнього рівняння маємо критичну довжину тріщини:

$$l=\frac{K_{Ic}^{2}}{\pi\sigma^{2}\cos^{4}\beta}=\frac{30^{2}}{\pi\cdot 120^{2}\cdot\frac{1}{16}}=0{,}3м\text{, при }\cos\beta=\cos 60^{\circ}=\frac{1}{2}.$$

Нехай $\boldsymbol{\alpha=45^{\circ},\cos\beta=\cos 45^{\circ}=1/\sqrt{2}}$, тоді:

$$l=\frac{30^{2}\cdot 4}{\pi\cdot 120^{2}}=0{,}08м.$$

Візьмемо $\boldsymbol{\alpha=60^{\circ},\cos\beta=\cos 30^{\circ}=\sqrt{3}/2}$, тоді критична довжина:

$$l=\frac{1}{\pi}\left(\frac{30}{120}\right)^{2}\cdot\frac{16}{9}=0{,}035м.$$

Нарешті візьмемо $\alpha=90^{\circ}$, $\cos\beta=\cos 0^{\circ}=1$. Тоді:

$$l=\frac{1}{\pi}\left(\frac{30}{120}\right)^{2}=0{,}02м.$$

Останнє одержане значення $l=0{,}02м$ і є найбезпечнішою критичною напівдовжиною тріщини. Таким чином, небезпечна тріщина розміщується поперек силового потоку.

Задача 15

Балка з поперечною тріщиною посередині завдовжки $2l=2см$ навантажена згинаючим моментом ***M***. Товщина поперечного перерізу ***t***=6 см , ширина 2***b***=4см. Матеріал балки – сталь марки 30ХГСА з параметрами $\boldsymbol{\sigma_{0.2}=1600МПа,K_{IC}=100МПа\sqrt{м}}$. Визначити критичне значення згинаючого моменту, при якому відбудеться руйнування пластини (рис.12.3).

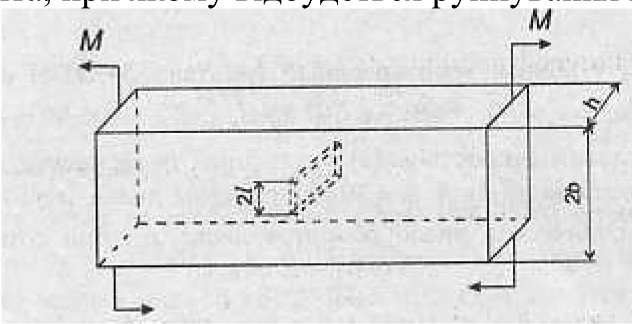


Рис.12.3

Розв'язання

Коефіцієнт інтенсивності напружень в цьому випадку дорівнює:

$$K=\sigma\sqrt{\pi l}\,\frac{8}{3\sqrt{6}}\frac{tl}{b^{2}}\left(1-\nu^{2}\right).$$

Тоді руйнуючий згинаючий момент буде таким:

$$M=\frac{K_{Ic}\cdot J\cdot 3\sqrt{6}\cdot b^2}{8\sqrt{\pi l}\cdot l^2\cdot t\cdot\left(1-\nu^2\right)}=\frac{K_{Ic}\cdot b^5\cdot 3\sqrt{6}}{\sqrt{\pi l}\cdot l^2\cdot 12\cdot\left(1-\nu^2\right)}=\frac{100\cdot 10^6\cdot 2^5\cdot 3\sqrt{6}}{\sqrt{\pi l}\cdot l^2\cdot 12\cdot\left(1-0{,}3^2\right)}=12\textit{кН}\cdot \textit{м}$$

Номінальне напруження на рівні вершини тріщини при цьому дорівнює:

$$\sigma=\frac{M}{I}y=\frac{12\cdot 10^5\cdot 12}{6\cdot 8\cdot 4}\cdot 1=30000\frac{H}{\textit{см}^2}=300\frac{H}{\textit{мм}^2}=300\textit{МПа}.$$

де момент інерції перерізу $I=\frac{t(2b)^3}{12}$; $y=1\textit{см}$.

Тоді ефективна довжина тріщини:

$$\boldsymbol{l_{\textit{ефф}}=l\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{300}{1600}\right)^2\right)=l\cdot 1{,}017}.$$

Звідси висновок: ефективна довжина тріщини співпадає з початковою. Отже, використання механіки руйнування правомірно.

Задача 16

Деталь, виготовлена з легованої сталі 30ХГСА з характеристиками $\boldsymbol{\sigma_B=1650\textit{МПа},\sigma_T=300\textit{МПа}}$, $K_{Ic}=100\textit{МПа}\sqrt{\textit{м}}$, знаходиться під дією розтягуючих напружень $\sigma=300\textit{МПа}$. В деталі є симетрично розміщена тріщина завдовжки 2***l***=3мм. Визначити коефіцієнт запасу міцності деталі з урахуванням тріщини і без.

Розв'язання

Коефіцієнт запасу міцності за визначенням дорівнює $n=\frac{\sigma_C}{\sigma_{\max}}$, де $\boldsymbol{\sigma_C=\frac{K_C}{\sqrt{\pi l}}}$ - критичне напруження деталі з тріщиною.

Тоді, руйнуюче напруження $\sigma_C=\frac{100}{\sqrt{3{,}14\cdot 0{,}0015}}=1458\textit{МПа}$, а запас міцності деталі з тріщиною $n=\frac{1458}{300}=4{,}85$.

Без урахування тріщини коефіцієнт запасу міцності визначається по відношенню до межі міцності матеріалу $n'=\frac{\sigma_B}{\sigma_{\max}}=\frac{1650}{300}=5{,}5>n$. Тріщина знижує запас міцності деталі.

Задача 17

Циліндрична оболонка з внутрішнім діаметром $D = 0{,}48\,м$ і товщиною стінки $\boldsymbol{h}$=8.5 мм навантажена внутрішнім тиском $\boldsymbol{p}$=20 МПа . На внутрішній поверхні стінки оболонки є напівеліптична тріщина глибиною $\boldsymbol{l}$=3 мм і довжиною вздовж твірної 2$\boldsymbol{c}$=8.5мм.

Механічні властивості матеріалу

$K_{Ic} = 74 МПа\sqrt{м}\,, \sigma_B = 1700 МПа\,, \sigma_{0,2} = 1000 МПа\,.$

Визначити коефіцієнт запасу міцності оболонки.

Розв'язання

Коефіцієнт запасу міцності $\boldsymbol{n} = \dfrac{\boldsymbol{\sigma_c}}{\boldsymbol{\sigma_{\max}}}$, де $\sigma_{\max}$ - максимальне напруження. Для даної конструкції $\dfrac{\boldsymbol{h}}{\boldsymbol{R}} = \dfrac{\mathbf{8.5}}{\mathbf{240}} = \mathbf{0.035} < \mathbf{0.05}$, отже можна вважати оболонку тонкостінною і для визначення напружень можна користуватися формулами Лапласа-Маріотта. Окружні і меридіональні напруження розраховуються таким чином:

$$\sigma_\theta = \frac{pR}{h} = \frac{20 \cdot 240}{8{,}5} = 565 МПа,\ \sigma_m = \frac{pR}{2h} = \frac{20 \cdot 240}{2 \cdot 8{,}5} = 283 МПа\,.$$

Елемент оболонки знаходиться в умовах плоского напруженого стану, краєва тріщина працює в умовах нормального відриву. Критичне напруження оцінюється співвідношенням:

$$\sigma_c = \frac{K_{Ic}}{Y_k\sqrt{\pi l}}\,.$$

Поправочна функція Y_k залежить від розмірів і розміщення тріщини в оболонці і для некрізної тріщини має вигляд:

$$Y_k = \frac{1}{E(k)}\left(1 + 0{,}12\left(1 - \frac{1}{c}\right)\left(\frac{2h}{\pi l}tg\frac{\pi l}{2h}\right)^{1/2}\right),$$

де $E(k) = \dfrac{\pi}{2}\left(1 - \dfrac{1}{4}\dfrac{c^2 - l^2}{c^2} - \dfrac{3}{64}\left(\dfrac{c^2 - l^2}{c^2}\right)^2\right)$ - наближена формула для повного еліптичного інтеграла другого роду *E(k)*; параметр $k = \sqrt{1 - \left(\dfrac{l}{c}\right)^2}$.

Обчислимо критичне напруження методом послідовних наближень, при $c = 4{,}25 мм,\ l = 3 мм$.

$$E(k)=\frac{3{,}14}{2}\left(1-\frac{1}{4}\left(1-\frac{3^2}{4{,}25^2}\right)-\frac{3}{64}\left(1-\frac{3^2}{4{,}25^2}\right)^2\right)=1{,}33\,.$$

$$Y_k=\frac{1}{1{,}33}\left(1+0{,}12\left(1-\frac{3}{4{,}25}\right)\left(\frac{2\cdot 8{,}5}{3{,}14\cdot 3}tg\frac{3{,}14\cdot 3}{2\cdot 8{,}5}\right)^{1/2}\right)=0{,}81\,.$$

Перше наближення для критичного напруження:

$$\sigma_c=\frac{74}{0{,}81\sqrt{3{,}14\cdot 3\cdot 10^{-3}}}=920\,МПа\,.$$

Обчислимо глибину тріщини з урахуванням пластичної зони, що утворюється у її вершині:

$$l_{эфф}=l_0\left(1+0{,}5\left(\frac{\sigma_c}{\sigma_{0,2}}\right)^2\right)=3\cdot 10^{-3}\left(1+0{,}5\left(\frac{920}{1000}\right)^2\right)=4{,}25\cdot 10^{-3}\,м\,.$$

Розміри тріщини збільшуються пропорційно її глибині:

$$2c_{эфф}=\frac{2cl_{эфф}}{l_\theta}=8{,}5\cdot\frac{4{,}25}{3}=12{,}04\,мм\,.$$

Перерахуємо поправочну функцію Y_{Ik} з урахуванням зміни розмірів тріщини:

$$Y_{эфф}=\frac{1}{1{,}33}\left(1+0{,}12(1-0{,}71)\left(\frac{2\cdot 8{,}5}{3{,}14\cdot 4{,}25}tg\frac{3{,}14\cdot 4{,}25}{2\cdot 8{,}5}\right)^{1/2}\right)=0{,}91\,.$$

Розрахуємо уточнене значення критичної напруження (друге наближення):

$$\sigma_c'=\frac{74}{0{,}91}\sqrt{3{,}14\cdot 4{,}25\cdot 10^{-3}}=625\,МПа\,.$$

Для отриманого значення σ_c' після другого наближення розміри тріщини мають значення:

$$l_{эфф}'=3\cdot 10^{-3}\left(1+0{,}5\left(\frac{695}{1000}\right)^2\right)=3{,}74\cdot 10^{-3}\,м\,.$$

$$2c_{эфф}'=2c\cdot\frac{l_{эфф}'}{l}=8{,}5\cdot\frac{3{,}74}{3}=10{,}5\,см\,.$$

Визначимо третє наближення для поправочної функції і критичного напруження:

$$.Y=f=\frac{1}{1{,}33}\left(1+0{,}12(1-0{,}71)\left(\frac{2\cdot 8{,}5}{3{,}14\cdot 3{,}74}tg\frac{3{,}14\cdot 3{,}74}{2\cdot 8{,}5}\right)^{1/2}\right)=0{,}89$$

$$\sigma''_C = \frac{74}{0{,}89}\sqrt{3{,}14\cdot 3{,}74\cdot 10^{-3}} = 750 МПа .$$

Подальші наближення дають уточнення критичних напружень не більше ніж на 5%. По отриманому значенню критичного напруження визначаємо коефіцієнт запасу міцності:

$$n = \frac{\sigma_C}{\sigma_\theta} = \frac{750}{565} = 1{,}33 .$$

Якщо розраховувати коефіцієнт запасу міцності за критерієм Сен-Венана без урахування тріщини, отримаємо завищене значення:

$$n' = \frac{\sigma_{0,2}}{\sigma_\theta} = \frac{1000}{565} = 1{,}76 .$$

Задача 18

Підібрати розміри бандажного кільця для циліндра (діаметр D=0.21 м, товщина стіни $t = 8 мм$), в якому була знайдена крізна тріщина завдовжки $2l$=6 мм. Тиск в циліндрі визначений згідно з границею текучості при запасі міцності $\boldsymbol{n_T}$=2.1.

Руйнуюче напруження зразка (ширина $b = 80 мм$, довжина центральної тріщини $2l = 4 мм$) з матеріалу циліндра дорівнює $1020 МПа$.

Розв'язання

Спочатку займемося зразком. Знайдемо в'язкість руйнування:

$$K_C = \sigma_C\sqrt{\pi l}Y\left(\frac{2l}{b}\right) = 1020\sqrt{\pi\cdot 2\cdot 10^{-3}}Y\left(\frac{4}{80}\right) = 81 МПа\sqrt{м} .$$

Тут прийнято Y(0.005)=1, у припущенні, що поверхня циліндра – площина. Визначимо радіус пластичної зони у вершині тріщини:

$$r_y = \frac{1}{2\pi}\frac{K_C^2}{\sigma_{0,2}^2} = \frac{81^2}{2\pi\cdot 1400^2} = 0{,}5 мм .$$

Виявляється, довжина пластичної зони ($1 мм$) порівнянна з довжиною тріщини і тому, при визначенні в'язкості руйнування, врахуємо пластичну поправку Ірвіна, а саме:

$$K_C = 1020\sqrt{\pi(2+0{,}5)\cdot 10^{-3}} = 90 МПа\sqrt{м} .$$

Таким чином, в'язкість руйнування не 81, а $90 МПа\sqrt{м}$. Тепер знайдемо руйнуюче кільцеве напруження в циліндрі:

$$\sigma_{\theta\Theta} = \frac{K_C}{\sqrt{\pi l}} = \frac{90}{\sqrt{\pi 3\cdot 10^{-3}}} = 824 МПа .$$

Для цього випадку визначимо радіус пластичної зони:

$$r_y = \frac{90^2}{2\pi 1400^2} = 0{,}6 мм.$$

З урахуванням пластичної поправки руйнуюче напруження буде таким:

$$\sigma_{\theta\Theta} = \frac{K_c}{\sqrt{\pi l}} = \frac{90}{\sqrt{\pi 3{,}6 \cdot 10^{-3}}} = 846 МПа.$$

Цьому напруженню відповідає руйнуючий тиск $p = \dfrac{\sigma_{\theta c} \cdot 2t}{D} = 64 МПа$.

Розрахунковий тиск в циліндрі $p = \dfrac{\sigma_T}{n}\dfrac{2t}{D} = \dfrac{1400}{2{,}1}\dfrac{2 \cdot 8}{210} = 50 МПа$.

При цьому кільцеве напруження дорівнює $\sigma_\theta = \dfrac{\sigma_T}{n} = 666 МПа$.

Очевидно, що у циліндрі з тріщиною запас міцності сильно знизився і став $\dfrac{64}{50} = 1{,}28$.

Для тимчасового збереження несучої здатності циліндра пропонується зробити бандаж (металеве кільце, надіте на циліндр для збільшення його міцності). Переріз бандажа слід призначати з конструкційних міркувань. Введемо наступне допущення – нехай площа поперечного перерізу бандажа складається з двох частин – компенсації площі, виходячи з нечутливості матеріалу циліндра до тріщини, і від падіння розрахункового напруження. Тоді площа перерізу бандажа буде:

$$F_{бандажа} = t \cdot 2l + t \cdot 2l \frac{\sigma_T - \sigma_{\theta c}}{\sigma_T} = 48(1 + 0{,}4) = 68 мм^2.$$

Задача 19

Перевірити залишкову міцність циліндра діаметром $D = 0{,}92 м$ з товщиною стінки t=9 мм. В циліндрі знайдено крізний дефект завдовжки 18 мм. При випробуванні плоского зразка (шириною b= 0.01 мм з центральною тріщиною завдовжки 2l=30мм) з матеріалу циліндра була визначено руйнуюче напруження 160 МПа. Границя текучості 340 МПа.

Розв'язання

За наслідками випробування зразка знаходимо характеристику тріщиностійкості згідно з ГОСТ 25.506-85:

$$K_c^* = I_c \cong I_{c\max} = \frac{P}{t\sqrt{b}} Y_1 = \frac{\sigma_c tb}{t\sqrt{b}} Y_1 = \sigma_c \sqrt{b} Y_1 = 160\sqrt{0{,}1} \cdot 0.727 = 37 МПа\sqrt{м}$$

З поправочних таблиць (див. лекц.10) знаходимо $Y_1\left(\dfrac{2l}{b}\right) = Y_1(0{,}3) = 0{,}727$.

Розрахунок циліндра ведемо згідно з границею тріщиностійкості $K = I_c$. Для циліндра приймаємо формулу для коефіцієнта K як для площини, тобто для розгортки циліндрової поверхні до її поєднання з площиною, яка розтягується кільцевими напруженнями. Запишемо розрахункове рівняння:

$$\sigma\sqrt{\pi l}=I_{C\max}\sqrt{1-\left(\frac{\sigma}{\sigma_T}\right)^2}\ .$$

З цього рівняння знаходимо руйнуюче окружне напруження:

$$\sigma_C=\frac{I_{C\max}}{\sqrt{\pi l+\left(\frac{I_{C\max}}{\sigma_T}\right)^2}}=\frac{37}{\sqrt{\pi 9\cdot 10^{-3}+\left(\frac{37}{340}\right)^2}}=190 МПа\,.$$

Руйнуючий тиск в судині $p=\frac{\sigma_C 2t}{D}=\frac{190\cdot 2\cdot 9}{920}=3{,}6 Мпа$.

Отже, діючий в циліндрі тиск треба понизити до рівня, який забезпечить запас міцності, що вимагається по відношенню до отриманого руйнуючого тиску.

Задача 20

Тріщина завдовжки $100\,мм$ знаходиться в умовах деформування по типу II під дією дотичних напружень $\tau=140 МПа$. Потім прикладають розтягуюче навантаження. В'язкість руйнування матеріалу $\boldsymbol{K_{IC}=90 МПа\sqrt{м}}$. Коефіцієнт форми ***У*** приймаємо рівним одиниці. Визначити допустиме розтягуюче напруження.

Розв'язання

Звичайно вважають справедливим таке співвідношення між $\boldsymbol{K_{IC}}$ і $\boldsymbol{K_{IIC}}$:

$$K_{IIc}=0{,}8K_{Ic}=0{,}8\cdot 90=72 МПа\sqrt{м}\ .$$

Обчислюємо коефіцієнт інтенсивності другого типу для даної тріщини:

$$K_{II}=\tau\sqrt{\pi\cdot 50\cdot 10^{-3}}=55 МПа\,.$$

Використовуємо двохкритерійну умову міцності у вигляді:

$$\left(\frac{K_{II}}{K_{IIc}}\right)^2+\left(\frac{K_I}{K_{Ic}}\right)^2=1.$$

Звідси маємо граничний коефіцієнт інтенсивності першого типу:

$$K_I^c=90\sqrt{1-\left(\frac{55}{72}\right)^2}=58 МПа\sqrt{м}\ .$$

Тепер знаходимо допустиме розтягуюче напруження (при тому, що дотичне напруження продовжує діяти):

$$\sigma=\frac{K_I^c}{\sqrt{\pi\cdot 50\cdot 10^{-3}}}=146 МПа\,.$$

Задача 21

Побудувати діаграму залишкової міцності (залежність $\sigma_C - l$) для розтянутої пластини з центральною тріщиною завдовжки 2*l*. Розрахунок зробити для ширини пластини 2*b*=600мм .

Прийняти $\sigma_T = 400 МПа$, $K_{IC} = 70 МПа\sqrt{м}$. Визначити по цих діаграмах граничні тріщини при робочих напруженнях $\sigma = 60 МПа$, $\sigma = 160 МПа$ і $\sigma = 360 МПа$.

Розв'язання

Діаграму апроксимуємо способом, запропонованим Федерсеном. Будуємо залежність критичного напруження від довжини тріщини (гіперболу) в площині $\sigma - l$ згідно з рівнянням $\boldsymbol{\sigma_C = \frac{K_{IC}}{\sqrt{\pi l}}}$. Цей спосіб припускає, що *K*-тарировку можна прийняти рівній одиниці. Далі з точки на осі ординат $\boldsymbol{\sigma = \sigma_T}$ проводимо дотичну до критичної діаграми, вона торкається гіперболи на рівні напруження, рівного $\boldsymbol{\frac{2}{3}\sigma_T}$.

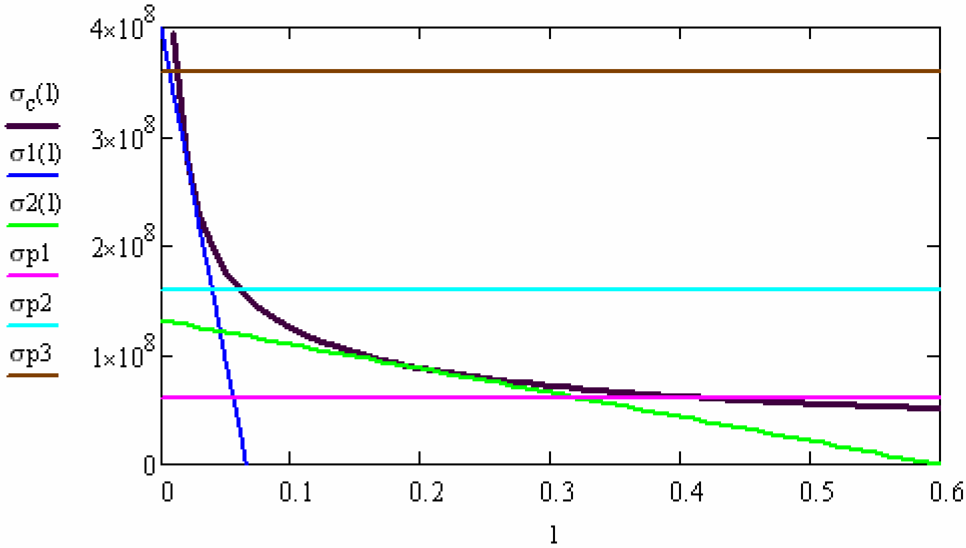
Рівняння цієї дотичної має вигляд: $\sigma_1 = 4 \cdot 10^8 - 61 \cdot 10^8 l$. Тепер проводимо другу дотичну з точки $l = b$, вона торкається гіперболи в точці з абсцисою, рівною $\frac{b}{3}$. Рівняння другої дотичної має вигляд: $\sigma_2 = 1{,}32 \cdot 10^8 - 2{,}21 \cdot 10^8 l$. Діаграма, що вийшла, складається з двох прямих і середньої ділянки у вигляді відрізка гіперболи, і є діаграмою залишкової міцності. Оскільки в умові задачі дано три значення робочих напружень, то одержимо три різні критичні довжини тріщин. Побудувавши діаграму залишкової міцності в Mathcad, знайдемо критичні довжини тріщин, які дорівнюють 0,4416*м*, 0,0594*м*, и 0,0144*м* відповідно для робочих напружень $\boldsymbol{60 МПа}$, $\boldsymbol{160 МПа}$ і $\boldsymbol{360 МПа}$.

$\sigma_t := 4\cdot 10^{8}$ $\quad K_{1c} := 70\cdot 10^{6}$ $\quad b2 := 0.6$ $\quad \sigma p1 := 60\cdot 10^{6}$ $\quad lp1 := 0.4416$

$\sigma 1(l) := 4\cdot 10^{8} - 61\cdot 10^{8}\cdot l$ $\quad \sigma p2 := 160\cdot 10^{6}$ $\quad lp1 := 0.0594$

$\sigma 2(l) := 1.32\cdot 10^{8} - 2.21\cdot 10^{8}\cdot l$ $\quad \sigma p3 := 360\cdot 10^{6}$ $\quad lp1 := 0.0144$

$\sigma_c(l) := \dfrac{K_{1c}}{\sqrt{\pi\cdot l}}$ $\quad l := 0, 0.01 .. 1$



Задача 22

Побудувати діаграму залишкової міцності при відомій пружнопластичній в'язкості руйнування $\boldsymbol{J_C = 130\frac{кН}{м}}$, границя текучості $\sigma_T = 400 МПа$. Діаграма розтягу апроксимована степеневою залежністю Рамберга-Осгуда у вигляді $\boldsymbol{\varepsilon = \left(\frac{\sigma}{\sigma_*}\right)}$, $\boldsymbol{\sigma_*}$ =164 МПа, *n*=5. Нехтувати пружною частиною J- інтеграла .

Розв’язання

Використовуємо наближену формулу $J = \dfrac{\sigma^{n+1}\pi l Y^{n+1}}{\sigma_*^{n}}$ **[4]**. Отже, рівняння критичної діаграми руйнування отримаємо з рівності $\boldsymbol{J = J_{IC}}$, а саме:

$$\sigma_C = \frac{\sigma_*^{\frac{n}{n+1}}}{Y}\left(\frac{J_{Ic}}{\pi l}\right)^{\frac{1}{n+1}}, \text{ де } Y = \sqrt{\pi}\left(1{,}77 + 0{,}227\lambda - 0{,}5\lambda^2 + 2{,}7\lambda^3\right),\ \lambda = \frac{l}{b}$$

Діаграму залишкової міцності, розраховану за J-інтегралом при $b = 0{,}1м$ у системі Mathcad, наведено нижче.

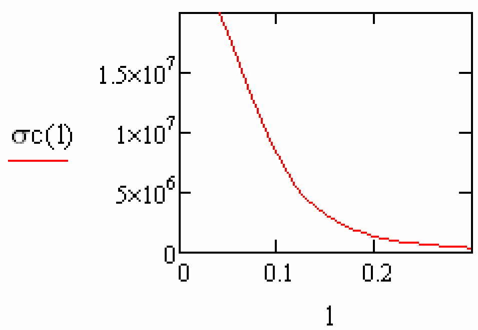
Тарування Y справедливе в діапазоні $0{,}1 \le \lambda \le 0{,}7$. В той же час приведена тут формула для J- інтеграла справедлива при $\mathbf{0.1 \le \lambda \le 0.6}$.

Діаграма залишкової міцностіпри відомій пружнопластичній в`язкості руйнування

$$Jc := 130 \cdot 10^{3} \quad \frac{Н}{м} \qquad \sigma z := 164 \cdot 10^{6} \qquad n := 5 \qquad b := 0.1 \qquad \lambda(l) := \frac{l}{b}$$

$$\sigma c(l) := \frac{\sigma z^{\frac{n}{n+1}}}{\sqrt{\pi} \cdot \left[1.77 + 0.227 \cdot \lambda(l) - 0.51 \cdot (\lambda(l))^{2} + 2.7 \cdot (\lambda(l))^{3}\right]} \left(\frac{Jc}{\pi \cdot l}\right)^{\frac{1}{n+1}}$$

$$l := 0, 0.01 .. 0.3$$



Задача 23

У середній частині пластини шириною b=200 мм і товщиною t=2 мм виявлено тріщину довжиною 2*l*=20мм. Пластина працює на розтяг, матеріал пластини – алюмінієвий сплав D16 (умовна границя текучості $\sigma_{0.2} = 220МПа$, характеристика тріщиностійкості $K_c = 30МПа \cdot м^{\frac{1}{2}}$). Знайдемо критичне напруження σ_c, при якому тріщина почне зростати, що приведе до руйнування пластини.

З довідника [1]знаходимо формулу для коефіцієнта *K*

$$K = \sigma\sqrt{\pi l} \cdot Y(l/b),$$

де σ – прикладене напруження, l – половина довжини тріщини.

Оскільки ширина полоси у десять разів перевищує довжину тріщини, то поправочний коефіцієнт $Y(l/b) = 1$. Формула для коефіцієнта *K* приймає вигляд

$$K = \sigma\sqrt{\pi l}.$$

Підставивши це значення у критеріальну умову, одержимо рівняння

$\sigma_c\sqrt{\pi l} = K_c$, або $\sigma_c\sqrt{\pi 10 \cdot 10^{-3}} = 30МПа \cdot м^{\frac{1}{2}}$.

Звідси критичне напруження $\sigma_c = 169МПа$.

Як видно руйнівне напруження для пластини з такою тріщиною менше границі текучості матеріалу.

Визначимо тепер критичну довжину тріщини, якщо розтягуючі напруження у пластині дорівнюють половину границі текучості (тобто коефіцієнт запасу дорівнює двом.. Використовуючи знову умову руйнування, одержимо, підставляючи замість напруження величину $\sigma = 0.5\sigma_{0.2}$.

$$0.5\sigma_{0.2}\sqrt{\pi l_c} = k_c, \text{ або } 110\sqrt{\pi l_c} = 30 МПа \cdot м^{\frac{1}{2}}.$$

Звідси критична довжина тріщини, що приводить до руйнування, дорівнює $2l_c = 56 мм$. Вона виявилася більшою ніж у попередньому прикладі оскільки діюче напруження менше ніж 169 МПа. Таким чином, для тріщини довжиною 20 мм коефіцієнт запасу по руйнівному напруженню виявляється таким:

$$n_c = \sigma_c / \sigma = 169/110 = 1.5,$$

Тобто розрахунок з урахуванням тріщини привів до зменшення запасу міцності пластини порівняно з розрахунком за критерієм текучості.

Задача 24.

В алюмінієвій панелі шириною $\boldsymbol{b} = \mathbf{2}$ м і завтовшки $\boldsymbol{h} = \mathbf{100}$ мм виявлено плоску крізну тріщину у зварному шві. Панель навантажена зусиллям $\boldsymbol{F}$ =1400 Тс. Тріщина завдовжки $\boldsymbol{l}$ = 20 мм розміщується перпендикулярно напряму розтягу, у центральній частині панелі. Матеріал — алюмінієвий сплав з в'язкістю руйнування $\boldsymbol{K}$=25 **МПа** $\boldsymbol{м}^{1/2}$. Чи безпечна експлуатація такої панелі?

Розв'язання.

Довжина тріщини мала в порівнянні з шириною панелі. Коефіцієнт інтенсивності напружень обчислимо за формулою $\boldsymbol{K_I} = \boldsymbol{\sigma}\sqrt{\dfrac{\boldsymbol{\pi l}}{\mathbf{2}}}$ / Критерій крихкого руйнування $\boldsymbol{K_I} = \boldsymbol{K_{1C}}$ визначає критичний розмір тріщини:

$$\boldsymbol{l_C} = \frac{\mathbf{2}\boldsymbol{K}_{\mathbf{1}\boldsymbol{C}}^{\mathbf{2}}}{\boldsymbol{\pi\sigma}^{\mathbf{2}}}.$$

Перш ніж підставити конкретні числові значення в цю формулу переведемо усі дані в систему СІ. Сила $\boldsymbol{F}$ = = 1400 Тс = $\mathbf{1.37 \times 10^7}$ Н, напруження

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\boldsymbol{F}}{\boldsymbol{bh}} = \frac{\mathbf{1.37 \cdot 10^7}}{\mathbf{2 \cdot 0.1}} = \mathbf{69}\boldsymbol{МПа}.$$

За формулою для $\boldsymbol{l_C}$ одержимо

$$\boldsymbol{l_C} = \frac{\mathbf{2 \cdot (25)^2}}{\boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{(69)^2}}\boldsymbol{м} = \mathbf{0.085}\ \boldsymbol{м},$$

тобто критична довжина тріщини $\boldsymbol{l}$ = 85 мм, так що тріщина довжиною $\boldsymbol{l} = \mathbf{20}\boldsymbol{мм}$, не є критичною. Проте перш ніж підтвердити безпеку експлуатації панелі, інженер повинен розібратися в тому, звідки з'явилася ця тріщина, як виросла до 20 мм, чи не продовжиться її зростання через утомленість або корозію, і як скоро довжина її може дійти до критичних 85 мм.

Приклад 25

Поперечну тріщину завдовжки $\boldsymbol{l}$= 30 мм виявлено у нижній полиці сталевої балки крана, ширина якої $\boldsymbol{b}$= 254 мм. Балка експлуатується при максимальному розтягуючому напруженні $\boldsymbol{\sigma}$= 172 МПа. Чи є експлуатація безпечною, якщо в'язкість руйнування сталі $\boldsymbol{K_{IC} = 165\ МПа \cdot м^{1/2}}$?

Розв'язання.

Перевірку можна провести двома способами:

1) Обчислимо $\boldsymbol{K_I = \sigma\sqrt{\frac{\pi l}{2}} = 172\sqrt{\pi \cdot 0.015}\ МПа \cdot м^{1/2} \approx 37.3\ МПа \cdot м^{1/2}}$.

Порівняємо знайдене значення з в'язкістю руйнування $\boldsymbol{K_{IC}}$. Оскільки $\boldsymbol{K}$ набагато менше $\boldsymbol{K_{IC}}$, балку вважаємо абсолютно безпечною, зрозуміло, із згаданими в прикладі 1 зауваженнями.

2) Підрахуємо критичну довжину дефекту за формулою

$$\boldsymbol{l_C = \frac{2 \cdot (165)^2}{\pi \cdot (172)^2} \approx 568\ мм},$$

Довжина наявної тріщини майже у 20 разів менше критичної.

Подивимося тепер, як врахувати скінченні розміри деталі і ввести поправку на пластичну зону у вершини тріщини. Для врахування реальної геометрії тіла знаходимо відповідний $\boldsymbol{K}$-тарировочний множник $\boldsymbol{Y}$, наприклад, для пластини шириною $\boldsymbol{b}$ з боковим надрізом довжиною $\boldsymbol{l}$

$$\boldsymbol{K_I = P\sigma\sqrt{l}Y},$$

де

$$\boldsymbol{Y = 1.99 - 0.41\lambda + 18.70\lambda^2 - 38{,}48\lambda^3 + 53.85\lambda^4},$$

($\boldsymbol{\lambda = l/b}$ відносна глибина надрізу).

Формула для $\boldsymbol{K_I}$ дає хорошу точність аж до $\boldsymbol{\lambda}$ = 0,7. Поправка Ірвіна на пластичність матеріалу полягає у фіктивному збільшенні довжини тріщини на малу величину, яка приблизно дорівнює радіусу пластичної зони у вершині тріщини. Повернемося до розібраного прикладу 2 про балку крана і припустимо на цей раз, що

1) поперечна тріщина в нижній полиці розміщується не в середині балки, а з краю;

2) кран повинен працювати на відкритому повітрі, а по зведенню погоди під час роботи нічної зміни температура може впасти до нуля градусів. З довідника [2] знаходимо, що при такій температурі в'язкість руйнування знизиться до 60 МПа • $\boldsymbol{м^{1/2}}$, а границя текучості – до 480 МПа. В даному прикладі відносна глибина тріщини $\boldsymbol{\lambda = l/b = 0.12}$; для такої глибини тарировочний множник $\boldsymbol{Y}$ у дорівнює

$Y = 1.99 - 0.41 \cdot 0.12 + 18.70 \cdot \left(0.12\right)^2 - 3.48 \cdot \left(0.12\right)^3 + 53.85 \cdot \left(0.12\right)^4 =$ **1,99 - 0,049 + 0,269 - 0,066 + 0,011 = = 2,15**. Обчислимо поправку Ірвіна на пластичність

$$r_y = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{60}{480}\right)^2 м \approx 2.5 мм.$$

Знову перевіримо безпеку балки двома способами :

1) $K_I = Y\sigma\sqrt{l + r_y} = 2.15 \cdot 172\sqrt{0.03 + 0.0025}\ МПа \cdot м^{1/2} \approx 66.7 МПа \cdot м^{1/2}$.

2) $l_C = \left(\frac{K_{IC}}{Y\sigma}\right)^2 \approx \left(\frac{60}{2.15 \cdot 172}\right)^2 м = 26.3\ мм$.

(Якщо врахувати, що вночі в'язкість руйнування сталі може знизитися до 60 **МПа** $м^{1/2}$, і що в балці знайдена тріщина завдовжки l = 30 мм, то обидва розрахунки говорять про те, що вночі балка крана буде на межі катастрофи. Зрозуміло, цей приклад є умовним в тому значенні, що в'язкість руйнування реальних балок кранів повинна бути достатньо високою і при низьких температурах, скажімо, на 20° нижче за мінімальну робочу температуру.