

2 ВИЗНАЧЕННЯ ВНУТРІШНІХ ЗУСИЛЬ У ПОПЕРЕЧНИХ ПЕРЕРІЗАХ СТЕРЖНІВ

2.1 Умови рівноваги навантаженого тіла

У попередньому розділі ми детально розглянули методику побудови розрахункової схеми конструкції. Тепер проаналізуємо силові фактори, які виникають у стержневих системах при навантажуванні (нагадаємо, що в ненавантаженому тілі внутрішні зусилля дорівнюють нулю). Процес визначення сил, що діють у конструкції – це фактично процес побудови математичної моделі, яка відповідає розрахунковій схемі.

Зосереджені сили і моменти в опорі матеріалів трактуються як вектори (рисунок 2.1, а). Кожну силу або момент можна розкласти у будь-якій системі координат на складові (рисунок 2.1, б).

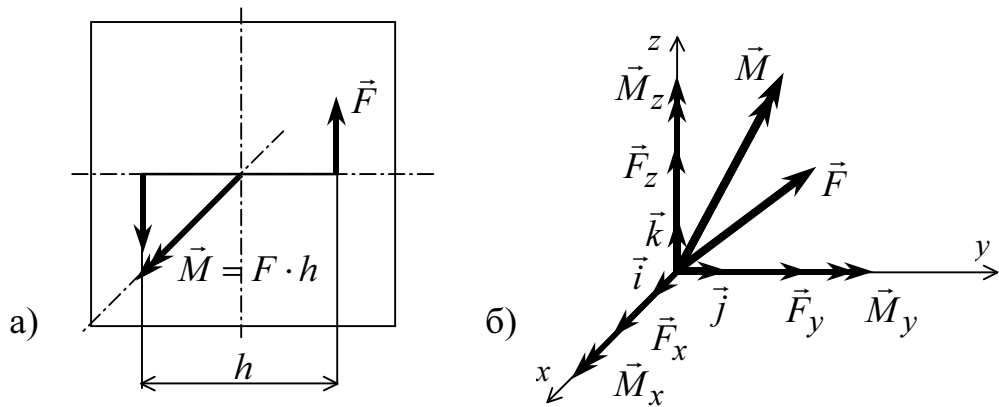


Рисунок 2.1 – Вектори сили і момента як пари сил (а); розкладення векторів сили і момента у довільній системі координат (б)

У векторному вигляді вектор сили має вигляд

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z = F_x \cdot \vec{i} + F_y \cdot \vec{j} + F_z \cdot \vec{k}, \quad (2.1)$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орти, F_x, F_y, F_z – компоненти вектора \vec{F} .

Аналогічно записується вектор момента

$$\vec{M} = M_x \cdot \vec{i} + M_y \cdot \vec{j} + M_z \cdot \vec{k}, \quad (2.2)$$

де M_x, M_y, M_z – проекції вектора \vec{M} на осі координат x, y, z , які є моментами сили \vec{F} відносно осей x, y, z (рисунок 2.2). Їх можна визначити, записуючи векторний добуток вектора сили \vec{F} і радіус-вектора \vec{r}

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}(F_z \cdot y - F_y \cdot z) + \vec{j}(F_x \cdot z - F_z \cdot x) + \vec{k}(F_y \cdot x - F_x \cdot y),$$

де x, y, z – координати точки прикладення сили, або проекції радіус-вектора на осі координат.

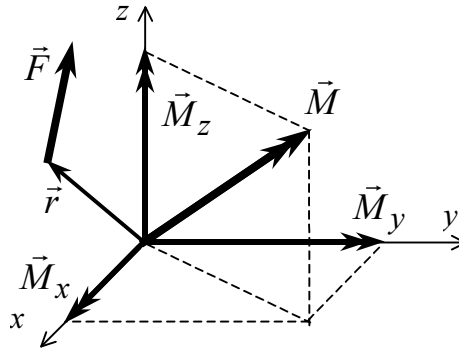


Рисунок 2.2 – Проекції вектора момента сили F відносно осей x, y, z

Таким чином, ми одержали вирази для проекцій момента

$$M_x = F_z \cdot y - F_y \cdot z, \quad M_y = F_x \cdot z - F_z \cdot x, \quad M_z = F_y \cdot x - F_x \cdot y.$$

Як бачимо, складові момента можна визначити через значення проекцій сили і відстань до відповідної осі.

У матричній формі вектори сили і момента записуються у вигляді стовпців компонент векторів у заданій системі координат:

$$F = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}.$$

Ми будемо вважати, що всі навантажені тіла знаходяться під дією урівноваженої системи сил, тобто системи, у якій головний вектор і головний момент дорівнюють нулю:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n \vec{M}_i = 0.$$

Враховуючи (2.1), (2.2), можна записати

$$\sum_{i=1}^n (F_x \cdot \vec{i} + F_y \cdot \vec{j} + F_z \cdot \vec{k}) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n (M_x \cdot \vec{i} + M_y \cdot \vec{j} + M_z \cdot \vec{k}) = 0.$$

Таким чином, умови рівноваги системи сил мають вигляд::

$$\sum_{i=1}^n F_{xi} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{yi} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{zi} = 0, \quad (2.3)$$

$$\sum_{i=1}^n M_{xi} = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{yi} = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{zi} = 0,$$

тобто суми проекцій усіх сил на осі координат і суми моментів сил відносно всіх осей дорівнюють нулю.

Умови рівноваги можуть використовуватись для визначення сил взаємодії між окремими елементами конструкції (внутрішніх сил) або між конструкцією і фундаментом (реакцій в'язей).

Реакції в'язей в опорі матеріалів моделюються за допомогою зосереджених сил і моментів. Для визначення реакцій в'язей використовують відому з курсу теоретичної механіки аксіому вивільнення від в'язей, згідно з якою конструкція буде знаходитись у рівновазі, якщо відкинути в'язі і замінити їх дію відповідними силами, напрямки яких позначаються у відповідності з конструкцією в'язей (рисунок 2.3).

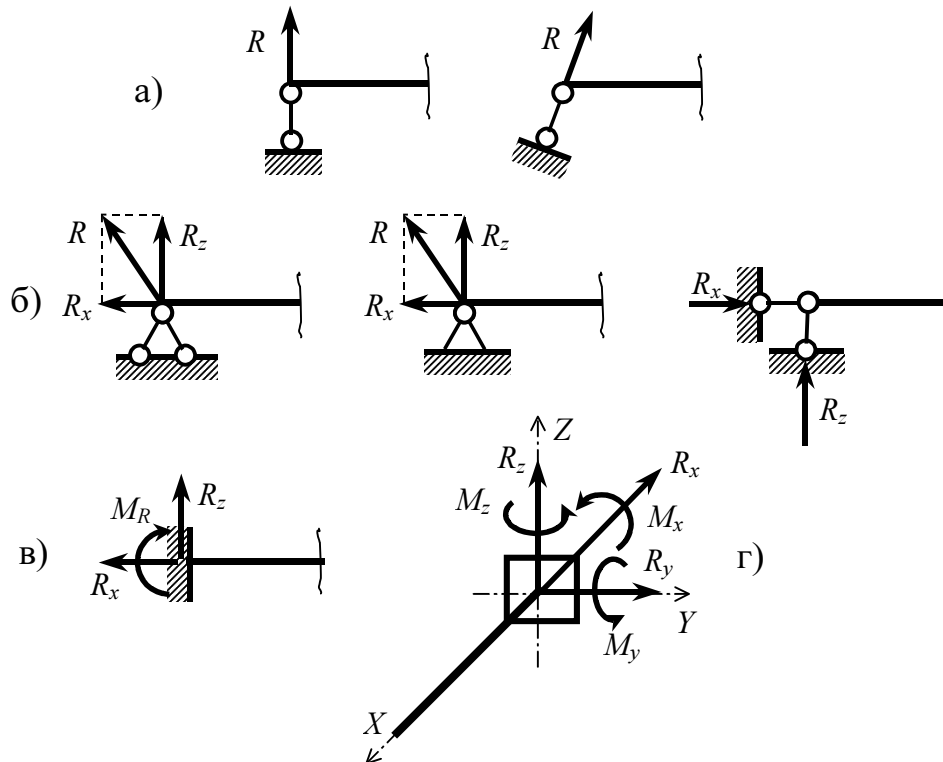


Рисунок 2.3 – Види опор: шарнірно-рухомі опори (а); шарнірно-нерухомі опори (б); жорстке закріплення плоскої конструкції (в); жорстке закріплення просторової конструкції (г)

Таким чином, для того, щоб визначити реакції опор, необхідно умовно відкинути опори, замінити їх відповідними силами і скласти рівняння рівноваги, кількість яких залежить від системи сил, яка діє на конструкцію, і від виду конструкції. Для плоскої системи сил складаємо три рівняння рівноваги, для просторової – шість (2.3).

ПРИКЛАД 2.1 Визначити опорні реакції для заданої балки (рисунок 2.4).

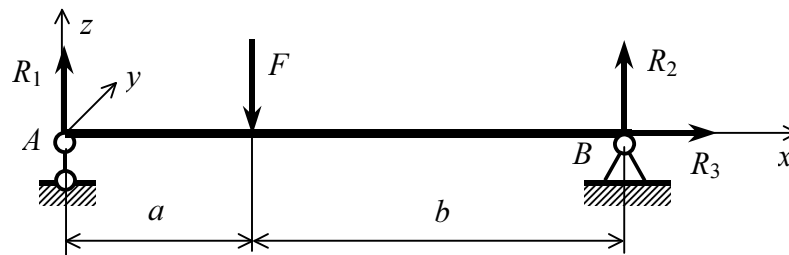


Рисунок 2.4 – Балка на двох опорах

Розв'язання.

Балка на двох опорах навантажена плоскою системою сил. Умовно відкинемо опори і позначимо невідомі реакції у відповідності з видом опор: у шарнірно-рухомій опорі A виникає одна реакція, напрямком якої співпадає з напрямком лінії, яка з'єднує умовні шарніри, у шарнірно-нерухомій опорі B одна реакція, напрямком якої невідомий, тому ми замінюємо її двома проекціями у напрямках осей і кажемо, що в шарнірно-нерухомій опорі виникає дві реакції.

Для плоскої системи сил, яку маємо в даному випадку, складаємо три рівняння рівноваги: суми проекцій сил на осі x і z та сума моментів сил відносно точки A дорівнюють 0:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_3 = 0; \quad (2.4)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_1 + R_2 - F = 0; \quad (2.5)$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow Fa - R_2(a+b) = 0. \quad (2.6)$$

Розв'язуючи систему сил, одержуємо значення реакцій:

$$R_2 = \frac{Fa}{a+b}, R_1 = \frac{Fb}{a+b}. \text{ Після визначення реакцій обов'язково робити}$$

перевірку – записати додаткове рівняння рівноваги, наприклад, скласти суму моментів відносно іншої точки:

$$\sum M_B = Fb - R_1(a+b) = Fb - \frac{Fb}{a+b}(a+b) = 0.$$

Розглянемо розв'язок системи рівнянь (2.4)-(2.6) за допомогою математичного пакета MathCAD.

1) Вводимо початкові дані:

$$F := 20 \text{ кН} \quad a := 2 \text{ м} \quad b := 3 \text{ м}$$

2) Невідомим величинам надаємо початкове значення (початкове наближення):

$$R1 := 0 \quad R2 := 0 \quad R3 := 0$$

3) Систему рівнянь у MathCAD розв'язуємо за допомогою блоку Given...Find:

$$\text{Given } R_3 = 0$$

$$R_1 + R_2 - F = 0$$

$$F \cdot a - R_2 \cdot (a + b) = 0$$

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} := \text{find}(R_1, R_2, R_3) \quad \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4) Виконуємо перевірку одержаних значень:

$$F \cdot b - R_1 \cdot (a + b) = 0$$

ПРИКЛАД 2.2 Визначити опорні реакції для заданої консольної балки (рисунок 2.5).

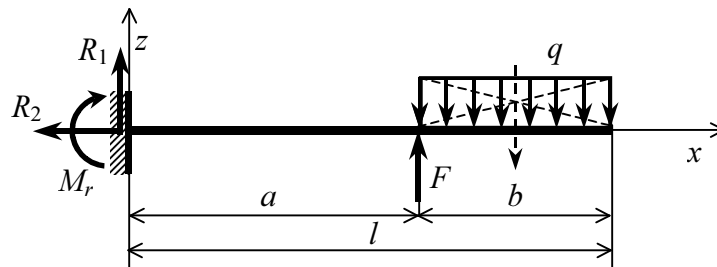


Рисунок 2.5 – Консольна балка

Розв'язання.

Скористаємось математичним пакетом MathCAD.

Початкові дані:

$$F := 20 \text{ кН} \quad q := 15 \text{ кН/м} \quad a := 3 \text{ м} \quad b := 2 \text{ м}$$

Початкове наближення для невідомих реакцій:

$$R_1 := 0 \quad R_2 := 0 \quad M_r := 0$$

Розв'язок системи рівнянь рівноваги за допомогою блоку Given...Find:

$$\text{Given } R_2 = 0$$

$$R_1 + F - q \cdot b = 0$$

$$M_r - F \cdot a + q \cdot b \cdot \left(a + \frac{b}{2} \right) = 0$$

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ M_r \end{pmatrix} := \text{Find}(R_1, R_2, M_r) \quad \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ M_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ -60 \end{pmatrix}$$

Від'ємне значення
момента означає, що
напрямок його
протилежний
вбраному спочатку

Перевірка: сума моментів відносно кінцевого перерізу балки:

$$M_r + F \cdot b - q \cdot b \cdot \frac{b}{2} + R_1 \cdot (a + b) = 0$$

2.2 Зв'язок між напруженнями та їх рівнодійними у поперечних перерізах стержнів

При навантажуванні тіла завжди мають місце два явища:

- тіло змінює свою форму і розміри – деформується;
- на кожній площадці, умовно проведеній в об'ємі, виникають внутрішні сили взаємодії між частинками об'єму – напруження.

Розглянемо стержень, навантажений урівноваженою системою сил (рисунок 2.6, а). Визначимо внутрішні сили, які діють у довільному поперечному перерізі стержня. Поперечним називають переріз стержня площиною, нормальною до його осі. У кожному такому перерізі діють сили взаємодії між двома частинами стержня. Як відомо, ці сили мають електромагнітну природу, але в механіці вони замінюються умовними, розподіленими по площині силами, так званими напруженнями.

Визначення напружень, які виникають при навантажуванні тіл, є однією з основних задач МТДТ і опору матеріалів. Оскільки безпосередньо визначати напруження в перерізах досить складно, спочатку визначають рівнодійні напружень – складові головного вектора і головного моменту в системі координат, пов'язаній з перерізом. Ці рівнодійні називають внутрішніми силами або зусиллями.

Знайдемо зв'язок між напруженнями та їх рівнодійними. Виділимо в поперечному перерізі нескінченно малу площадку $dA = dy \cdot dz$. Напруження, яке діє у площадці, розкладемо на складові $\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}$, де σ_x – нормальне напруження, τ_{xy}, τ_{xz} – дотичні напруження. Координати площадки у центральних головних осях перерізу Y, Z будуть y, z . Рівнодійні напружень, одержимо, приводячи елементарні сили, діючі на кожній із площадок dA , до центра ваги перерізу O і осей X, Y, Z (рисунок 2.6, б):

$$N_x = \int_A \sigma_x dA \text{ – поздовжня сила;}$$

$$N_y = \int_A \tau_{xy} dA \text{ – поперечна сила в напрямку осі } Y;$$

$$N_z = \int_A \tau_{xz} dA \text{ – поперечна сила в напрямку осі } Z;$$

$$M_y = \int_A \sigma_x z dA \text{ – згинаючий момент відносно осі } Y;$$

$$M_z = \int_A \sigma_x y dA \text{ – згинаючий момент відносно осі } Z;$$

$$M_x = \int_A (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) dA \text{ – момент кручення.}$$

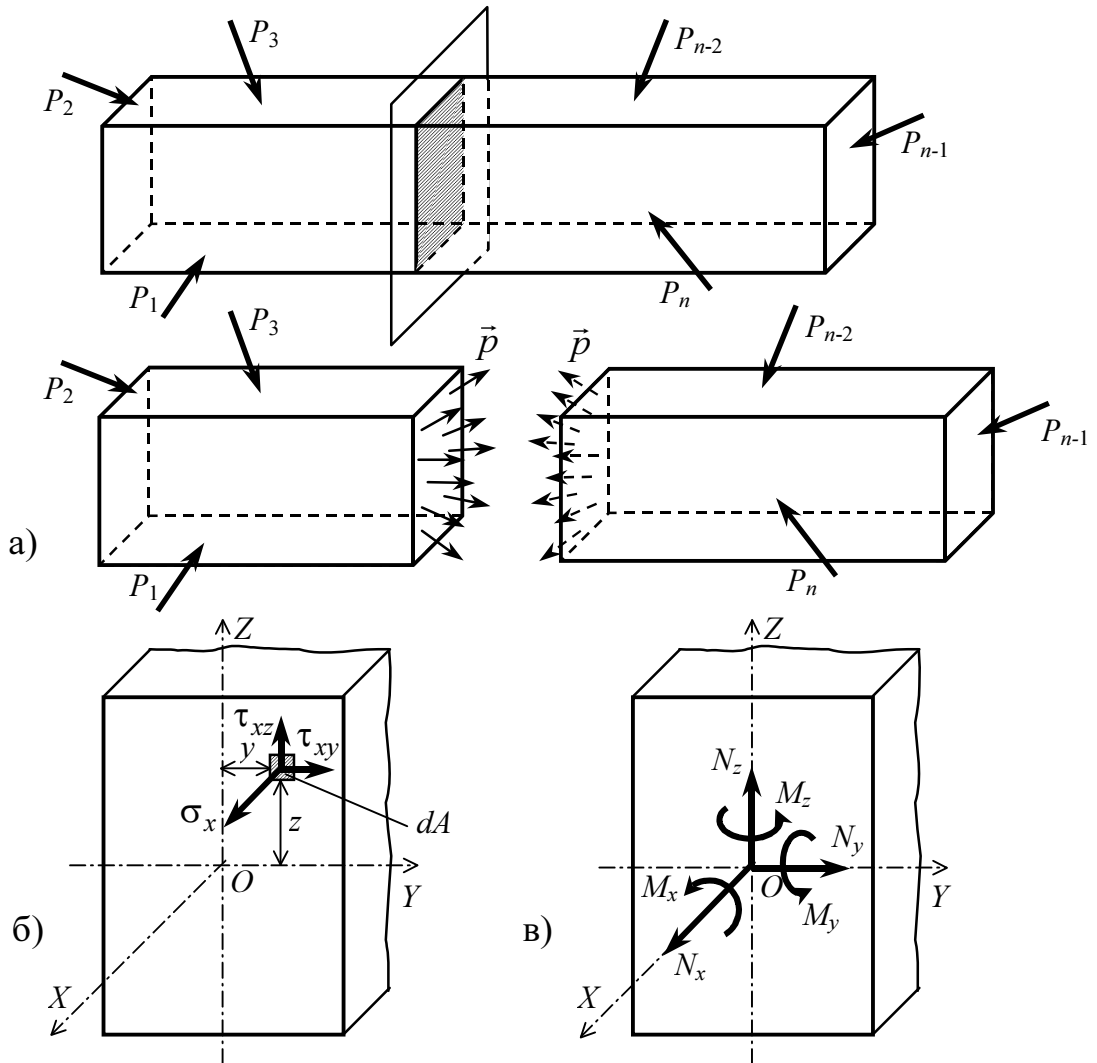


Рисунок 2.6 – Стержень, навантажений довільною урівноваженою системою сил (а); напруження в поперечному перерізі стержня (б); рівнодійні напружень (в)

Рівнодійні напружень (далі будемо їх називати внутрішніми силами або зусиллями) можна визначити за відомими зовнішніми силами, а потім знайти і напруження в довільній точці перерізу, щоб порівняти їх із руйнівним напруженням і зробити висновок про міцність конструкції.

2.3 Залежності між внутрішніми силами і зовнішнім навантаженням

Сформулюємо математичну модель для сил, що діють у перерізах балки і визначимо зв'язок між зовнішніми і внутрішніми силами.

Розглянемо стержень, навантажений довільним поздовжнім навантаженням (рисунок 2.7, а). На відстані x від початку стержня виділимо нескінченно малий елемент довжиною dx . Позначимо рівнодійні сил, що діють у перерізах x і $x + dx$, відповідно N_x і $N_x + dN_x$ (рисунок 2.7, б). Сили, прикладені на торцях елемента – це ті сили, з якими ліва і

права частини стержня діють на елемент. Зовнішнє навантаження q на нескінченно малій відстані dx може вважатися сталим.

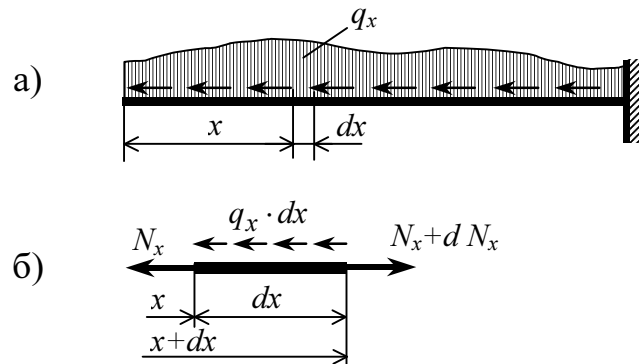


Рисунок 2.7 – Стержень, навантажений поздовжнім навантаженням (а); зовнішні і внутрішні сили, які діють на елемент довжиною dx (б)

Розглянемо рівновагу виділеного елемента, враховуючи всі прикладені сили. Під дією зовнішніх і внутрішніх сил елемент знаходиться у рівновазі. Запишемо умову рівноваги як суму проєкцій сил на вісь стержня

$$N_x + q_x \cdot dx - N_x - dN_x = 0.$$

Звідси маємо

$$\frac{dN_x}{dx} = q_x \Rightarrow N_x = \int q_x dx + C. \quad (2.7)$$

Одержаний вираз для поздовжньої сили N_x – це, по суті, математичне формулювання методу перерізів. Сила N_x дорівнює сумі проєкцій усіх зовнішніх сил на вісь стержня, діючих по один бік від перерізу. Стала $C = N_x(0)$ – це поздовжня сила на початку розрахунку, тобто в початковому перерізі стержня, яка визначається із граничних умов.

ПРИКЛАД 2.3 Визначити внутрішні сили у стержні, навантаженому розподіленим навантаженням, яке змінюється за заданим законом (рисунок 2.8, а).

Розв'язання.

$q_x(x) = q \cdot x$ – зовнішнє навантаження змінюється за лінійним законом.

Згідно з (2.7)

$$N_x(x) = \int q_x(x) dx + C = \int q \cdot x dx + C = q \frac{x^2}{2} + C.$$

При $x = 0$ $N_x(0) = C = 0$. Побудуємо графік залежності внутрішньої сили $N_x(x)$ від x . Оскільки внутрішня сила змінюється за параболічним законом, визначимо значення функції у трьох точках (рисунок 2.8, б):

$$N_x(0) = 0; \quad N_x\left(\frac{l}{2}\right) = q \frac{l^2}{8}; \quad N_x(l) = q \frac{l^2}{2}.$$

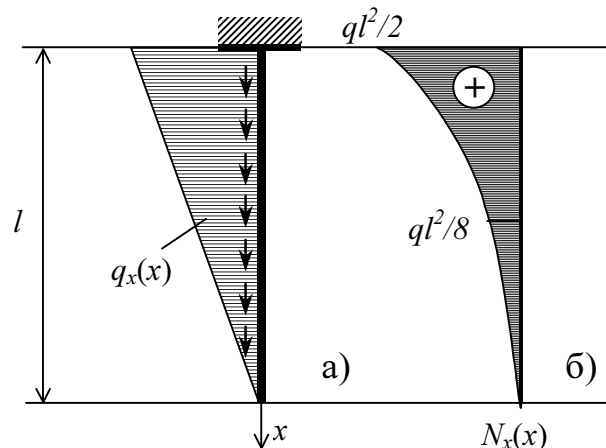


Рисунок 2.8 – Стержень із заданим навантаженням (а), графік зміни поздовжньої сили $N_x(x)$ (б)

Розглянемо стержень, на який діє інший вид навантаження – довільне навантаження q_z , перпендикулярне осі X . Скористаємось методикою, розглянутою вище, тобто виділимо нескінченно малий елемент довжиною dx на відстані x від початку стержня і розглянемо рівновагу виділеного елемента з урахуванням усіх прикладених сил (рисунок 2.9). В даному випадку внутрішніми силами, які діють на торцях елемента є поперечні сили N_z і $N_z + dN_z$ та згинаючі моменти відносно осі Y M_y і $M_y + dM_y$.

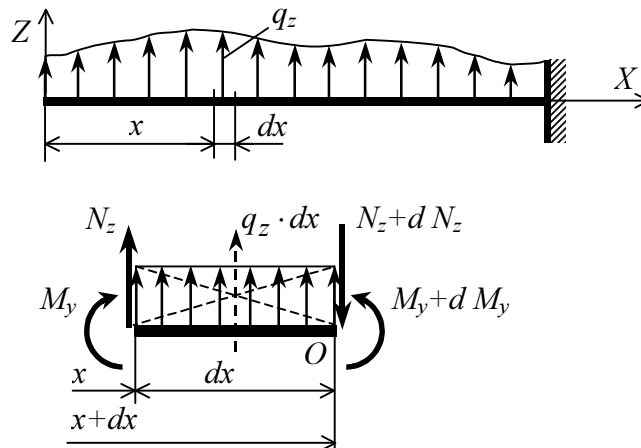


Рисунок 2.9 – Внутрішні сили у стержні при довільному поперечному навантаженні

Складемо умови рівноваги елемента.

Сума проєкцій поперечних сил на вісь Z

$$N_z + q_z \cdot dx - N_z - dN_z = 0;$$

$$\frac{dN_z}{dx} = q_z \Rightarrow N_z = \int q_z dx + C_z. \quad (2.8)$$

Сума моментів відносно точки O

$$M_y + N_z \cdot dx + q_z \cdot dx \cdot \frac{dx}{2} - M_y - dM_y = 0.$$

Доданок $q_z \cdot dx \cdot \frac{dx}{2}$ можна не враховувати як нескінченно малу величину другого порядку малості, тоді

$$\frac{dM_y}{dx} = N_z \Rightarrow M_y = \int N_z dx + C_z, \quad (2.9)$$

або
$$\frac{d^2 M_y}{dx^2} = q_z \Rightarrow M_y = \iint q_z dx + C_z \cdot x + D_y, \quad (2.10)$$

де $C_z = N_z(0)$, $D_y = M_y(0)$ – початкові параметри: відповідно, поперечна сила і згинаючий момент на початку розрахунку, які визначаються із граничних умов.

Використовуючи ті ж міркування, тобто записуючи умови рівності нулю головного вектора і головного момента при довільному навантаженні, можна одержати диференційні залежності всіх внутрішніх сил від зовнішнього навантаження:

$$N_x = \int q_x dx + C_x, \quad N_z = \int q_z dx + C_z, \quad N_y = \int q_y dx + C_y, \quad (2.11)$$

$$M_x = \int m_x dx + D_x, \quad M_y = \int N_z dx + D_y = \iint q_z dx + C_z \cdot x + D_y, \quad (2.12)$$

$$M_z = \int N_y dx + D_z = \iint q_y dx + C_y \cdot x + D_z$$

ПРИКЛАД 2.4 Визначити внутрішні сили у балці, завантаженій заданим навантаженням (рисунок 2.10).

Початкові дані: $F = 10 \text{ кН}$, $q = 20 \text{ кН/м}$, $l = 2 \text{ м}$.

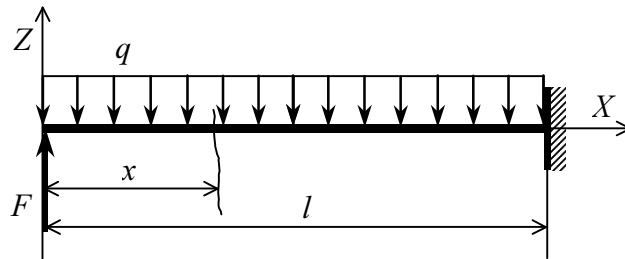


Рисунок 2.10 – Розрахункова схема навантаженої балки

Розв'язання.

Функція заданого навантаження є сталою $q_z(x) = -q$.

Запишемо функції внутрішніх сил, скориставшись залежностями (2.8, 2.10):

$$N_z(x) = \int q_z(x) dx + C_z = -qx + C_z \text{ – функція поперечних сил;}$$

$$M_y(x) = \iint q_z(x) dx + C_z \cdot x + D_y = -q \frac{x^2}{2} + C_z \cdot x + D_y \text{ – функція}$$

згинаючих моментів.

Визначимо початкові параметри:

$$C_z = N_z(0) = F = 10, \quad D_y = M_y(0) = 0.$$

Функції внутрішніх сил матимуть вигляд:

$$N_z(x) = -qx + F;$$

$$M_y(x) = -q \frac{x^2}{2} + F \cdot x.$$

Побудуємо графіки цих функцій.

Графіки або діаграми, які показують, як змінюються внутрішні сили по довжині стержня, називаються **епюрами** внутрішніх сил.

$$N_z(0) = F = 10, \quad N_z(l) = -q \cdot l + F = -30 \text{ кН};$$

$$M_y(0) = 0, \quad M_y(l) = -q \frac{l^2}{2} + F = -20 \text{ кНм}, \quad M_y\left(\frac{l}{2}\right) = -q \frac{l^2}{8} + F = 0.$$

За одержаними значеннями будуємо епюри поперечних сил і згинаючих моментів (рисунок 2.11).

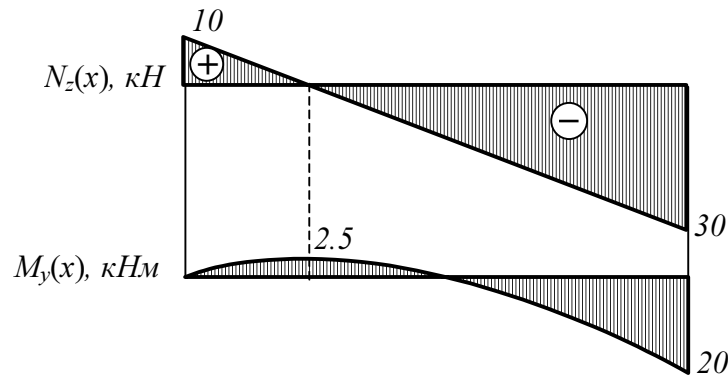


Рисунок 2.11 – Епюри внутрішніх сил для балки з рисунка 2.10

За змістом розв'язків (2.11), (2.12) внутрішні зусилля можна знайти як суму сил, що діють на брус на інтервалі $(0, x)$ і суму моментів сил, які діють у цьому інтервалі відносно перерізу x . У практиці визначення внутрішніх зусиль одержані рівняння є математичним формулюванням методу перерізів [1]. Метод перерізів дає змогу знайти зусилля, не вдаючись до інтегрування, а визначаючи відповідні суми у кожному з перерізів бруса. Проте, незважаючи на його просте формулювання, на практиці для реальних конструкцій метод перерізів приводить до складних викладок, що пов'язано з визначенням початкових параметрів на кожній окремій ділянці, а головне, не дозволяє ефективно використати ЕОМ.

Тому метод перерізів використовується здебільшого при визначенні внутрішніх сил у фермах. Для визначення внутрішніх зусиль у стержнях і рамах частіше використовують метод приведення сил у формі правила: на кожній ділянці функції внутрішніх сил записуються як суми сил і моментів, які діють від самого початку конструкції до перерізу, тобто зовнішнє навантаження приводиться до перерізу, який розглядається. Цей

метод дозволяє скористатись можливостями математичного пакета MathCAD при розв'язанні прикладів.

2.4 Визначення внутрішніх зусиль за допомогою узагальнених функцій

Застосування розв'язків (2.11), (2.12) ускладнюється тим, що зовнішні навантаження $q(x)$ і $m(x)$ здебільшого не можна записати як неперервні і розподілені по всій довжині стержня функції. Частіше ці функції є кусково-неперервними або з розривами першого роду (рисунок 2.12).

Додаткові труднощі пов'язані також із наявністю зосереджених сил і моментів. В такому випадку визначати внутрішні зусилля необхідно окремо на кожній ділянці, де функція зовнішнього навантаження є неперервною. При наявності великої кількості ділянок рівняння дуже ускладнюються. Уникнути цих труднощів можна, скориставшись так званими узагальненими функціями [2], зокрема, функцією Хевісайда та δ -функцією Дірака.

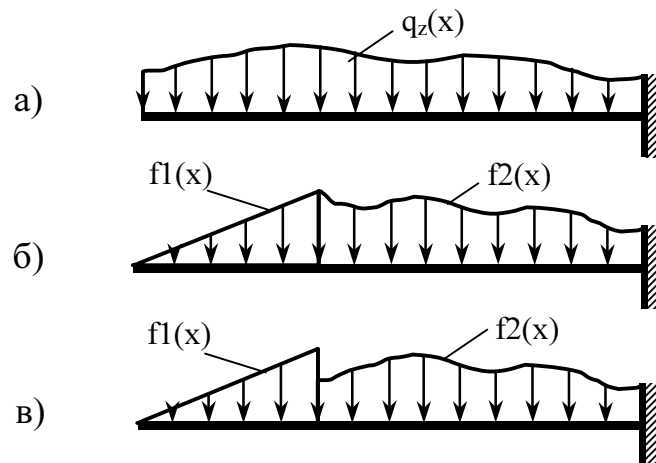


Рисунок 2.12 – Функції зовнішнього навантаження: неперервна (а); кусково-неперервна (б); з розривами першого роду (в)

Функція Хевісайда (ступінчаста або релейна) має вигляд:

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \\ 1 & \text{при } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \Phi(x-a) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < a \\ 1 & \text{при } x \geq a. \end{cases}$$

Функція Дірака – похідна від функції Хевісайда – має вигляд:

$$\delta(x-a) = \begin{cases} \infty & \text{при } x = a \\ 0 & \text{при } x \neq a. \end{cases}$$

Таким чином, при наявності зосереджених сил і моментів функції зовнішнього навантаження можна записати так, як показано на рисунку 2.13:

У загальному випадку рівняння зовнішнього навантаження для плоскої системи сил матиме вигляд

$$q_z(x) = \sum_{i=1}^n q_{zi} \cdot \Phi(x - a_i) + \sum_{j=1}^m N_{zj} \cdot \delta(x - b_j) + \sum_{k=1}^p M_{yk} \cdot \delta'(x - c_k), \quad (2.13)$$

де a_i, b_j, c_k – координати перерізів, де прикладені відповідні сили.

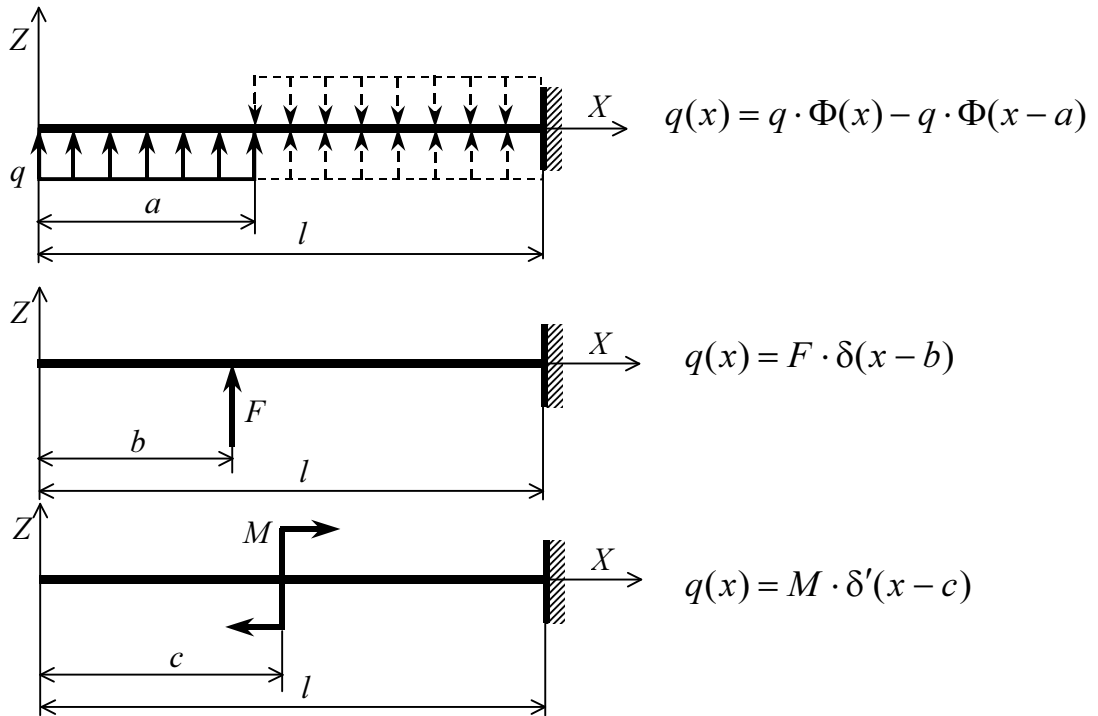


Рисунок 2.13 – Використання узагальнених функцій для запису функції зовнішнього навантаження

Підставивши вираз (2.13) в інтеграли (2.11), (2.12), одержимо

$$N_z(x) = \sum_{i=1}^n q_{zi} \cdot (x - a_i) \cdot \Phi(x - a_i) + \sum_{j=1}^m N_{zj} \cdot \Phi(x - b_j) + \sum_{k=1}^p M_{yk} \cdot \delta(x - c_k), \quad (2.14)$$

$$M_y(x) = \sum_{i=1}^n q_{zi} \cdot \frac{(x - a_i)^2}{2} \cdot \Phi(x - a_i) + \sum_{j=1}^m N_{zj} \cdot (x - b_j) \cdot \Phi(x - b_j) + \sum_{k=1}^p M_{yk} \cdot \Phi(x - c_k). \quad (2.15)$$

У рівнянні (2.14) останній доданок не враховується, тому що на осі немає відповідного значення.

Як бачимо, функція Хевісайда вказує, треба чи не треба враховувати той чи інший доданок у виразі функції при даному x . Співвідношення (2.14), (2.15) дають можливість побудувати епюри внутрішніх зусиль по всій довжині стержня і до того ж легко програмуються на ЕОМ.

ПРИКЛАД 2.5 Скласти рівняння внутрішніх сил для консольної балки (рисунок 2.14) за допомогою функції Хевісайда.

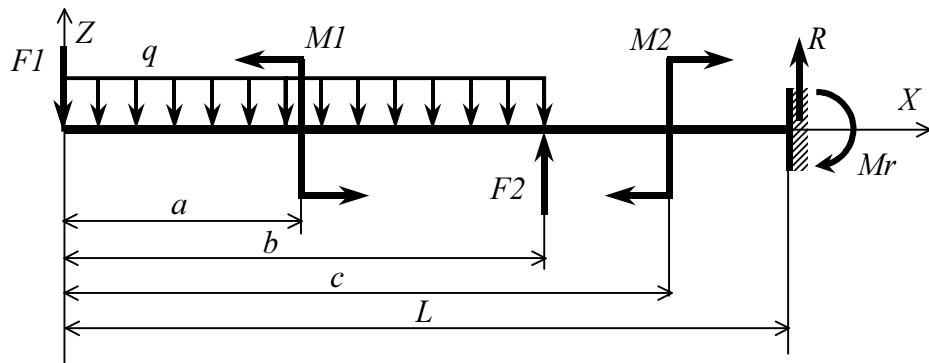


Рисунок 2.14 – Розрахункова схема консольного стержня

Розв'язання:

Використання функції Хевісайда передбачає розв'язання задачі розрахунку конструкції за допомогою математичного пакета MathCAD (Додаток 2). Функція Хевісайда є вбудованою у MathCAD, як і велика кількість інших корисних функцій.

Рівняння внутрішніх сил записуємо, враховуючи правило знаків: **поперечна сила вважається додатною, якщо її вектори обертають частини розсіченої балки за годинниковою стрілкою, момент вважається додатним зі сторони розтягнутих волокон** (рисунок 2.15), таким чином епюра згинаючих моментів будується на стиснутих волокнах.

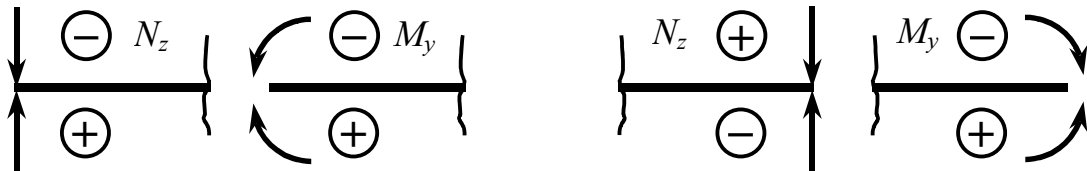


Рисунок 2.15 – Правило знаків для внутрішніх сил у балках

Якщо вести розрахунок зліва направо, то знаки для момента і поперечної сили співпадають.

$$N_z(x) := -F1 \cdot \Phi(x) - q \cdot x \cdot \Phi(x) + q \cdot (x - b) \cdot \Phi(x - b) + F2 \cdot \Phi(x - b) \dots + R \cdot \Phi(x - L)$$

$$M_y(x) := -F1 \cdot x \cdot \Phi(x) - q \cdot \frac{x^2}{2} \cdot \Phi(x) + q \cdot \frac{(x - b)^2}{2} \cdot \Phi(x - b) \dots + F2 \cdot (x - b) \cdot \Phi(x - b) + R \cdot (x - L) \cdot \Phi(x - L) \dots + -M1 \cdot \Phi(x - a) + M2 \cdot \Phi(x - c) + Mr \cdot \Phi(x - L)$$

Для побудови епюр внутрішніх зусиль необхідно попередньо визначити опорні реакції, склавши рівняння рівноваги, а далі епюри (графіки функцій $N_z(x)$ і $M_y(x)$) будуються у MathCAD за простим алгоритмом (Додаток 2).